

# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif

# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif

# Simulations numériques

Techniques utilisées dans la littérature pour l'étude des interactions de marée disque-planète :

- Méthodes à grille
- SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*)

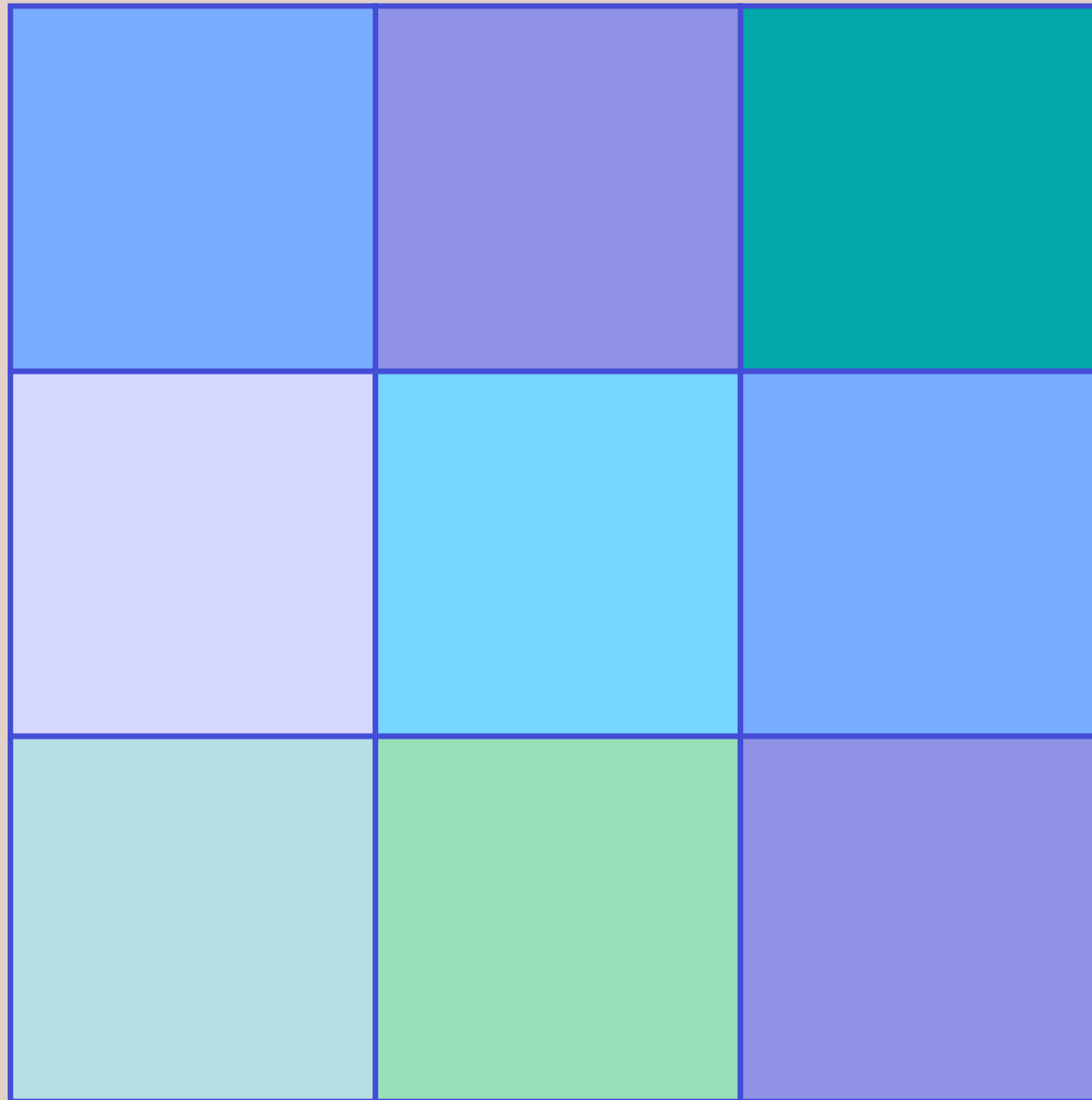
# Principe des méthodes à grilles

Il s'agit de *discrétiser* les équations hydrodynamiques dans le temps et dans l'espace (→ sur une grille).

Les équations différentielles sont remplacées par des équations aux différences finies

La difficulté consiste à assurer que les lois de conservation physiques (masse, moment linéaire et angulaire, énergie) soient vérifiées également dans la version discrète.

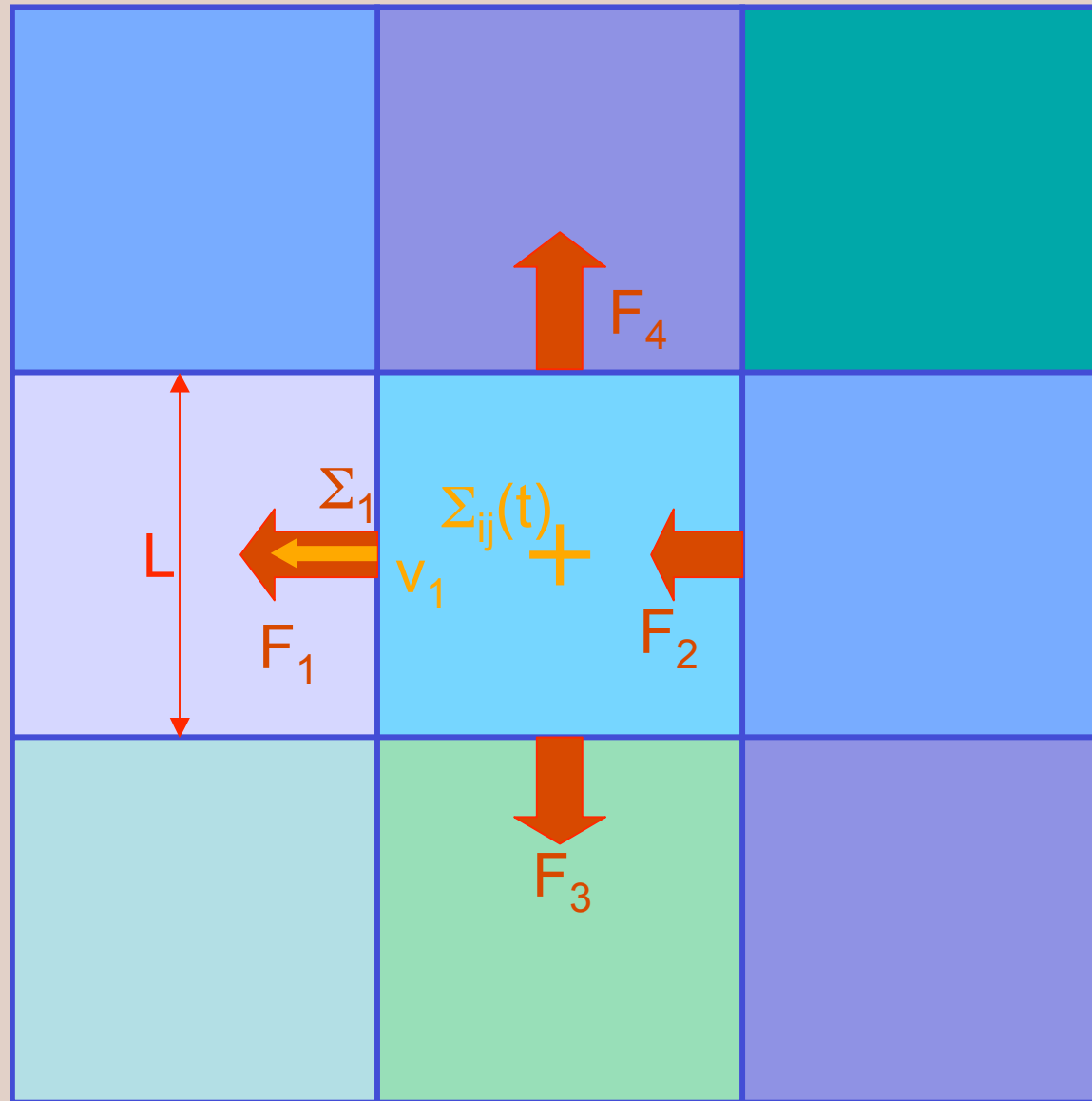
## Exemple de grille



La densité (de surface en 2D) est attribuée au centre des cellules (ou zones).

On examine la mise à jour, de la date  $t$  vers la date  $t+\Delta t$ , de la densité de la cellule centrale.

# Mise à jour conservative



$$\int_{\text{zone}} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \int_{\text{zone}} \nabla \cdot (\Sigma \mathbf{v}) = 0$$

Théorème de Stokes

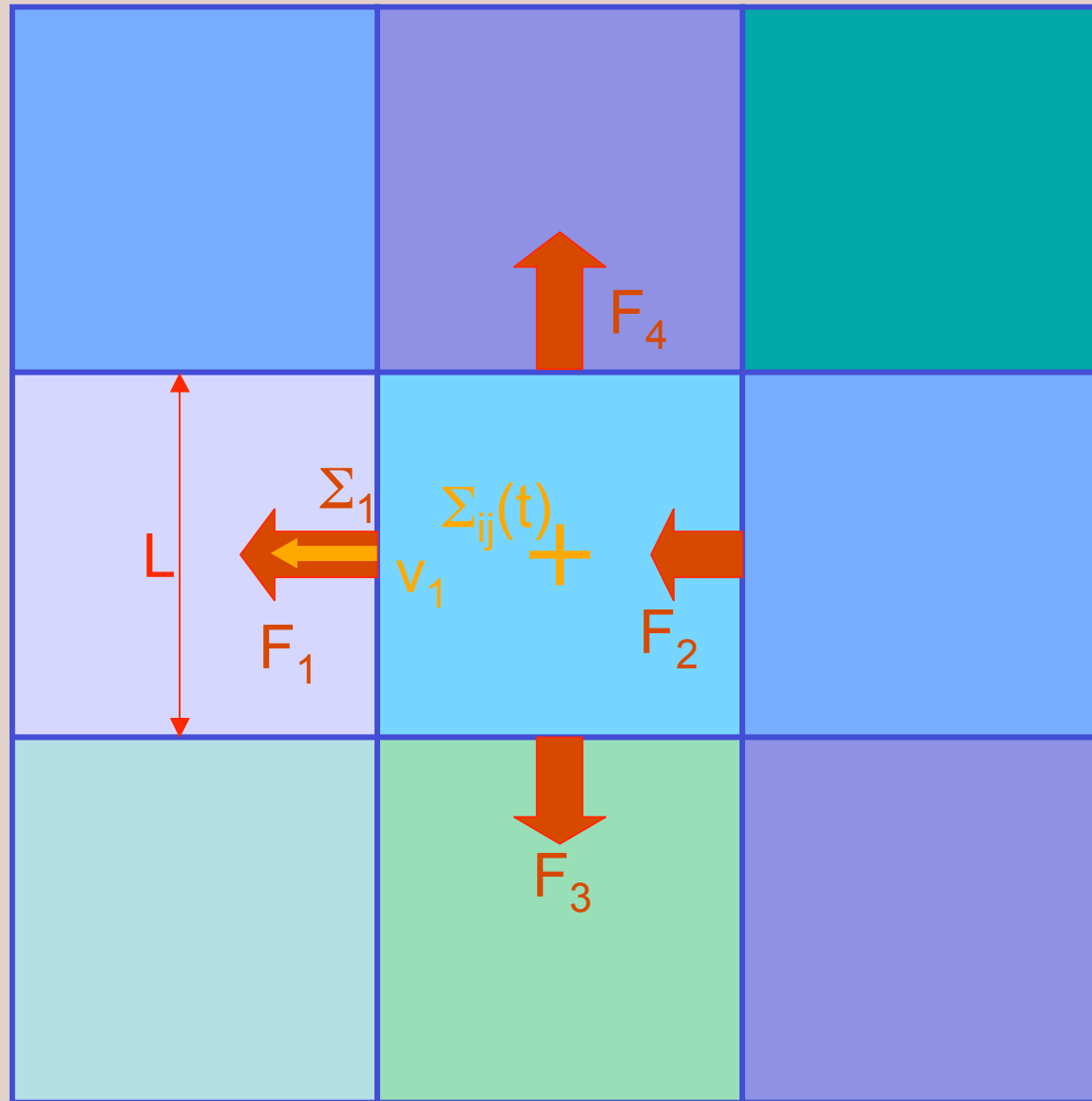
$$\int_{\text{zone}} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \int_{\text{surface zone}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Version discrète :

$$\begin{aligned} \delta M / \delta t &= - \sum_{\text{faces}} \text{Flux} \\ &= -F_1 + F_2 - F_3 - F_4 \end{aligned}$$

$$\text{Où : } F_1 = v_1 \cdot L \cdot \Sigma_1$$

# Mise à jour conservative



Chaque flux est partagé par les deux cellules avoisinantes.

Cela assure la conservation de la quantité (ici la masse).

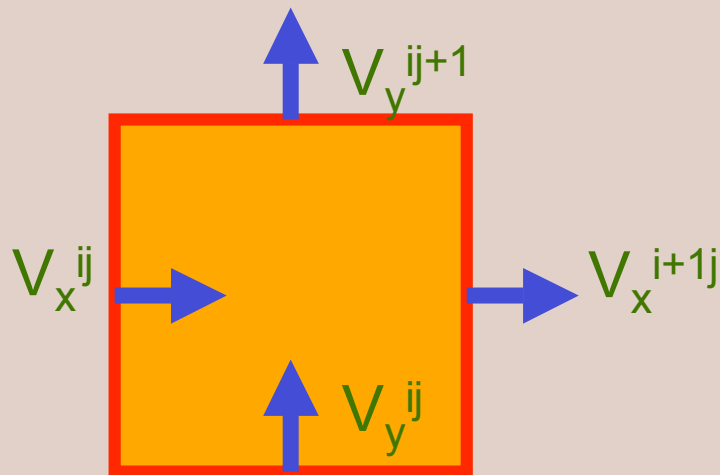
On parle d'*étape conservative*

La difficulté consiste en l'évaluation des flux

# Evaluation des flux

Premier cas : grille alternée (*staggered mesh*)

Dans les codes à grille alternée, les quantités scalaires sont attribuées au centre des zones (densité, pression, etc.), alors que les vitesses sont attribuées aux interfaces.



Avantage : les vitesses sont prêtes à être utilisées pour le calcul des flux  
Respecte au mieux le « centrage » des équations.



# Evaluation des flux

Les méthodes à grille alternée nécessitent le recours à une viscosité artificielle au voisinage des chocs, pour amortir des oscillations post-choc instables.

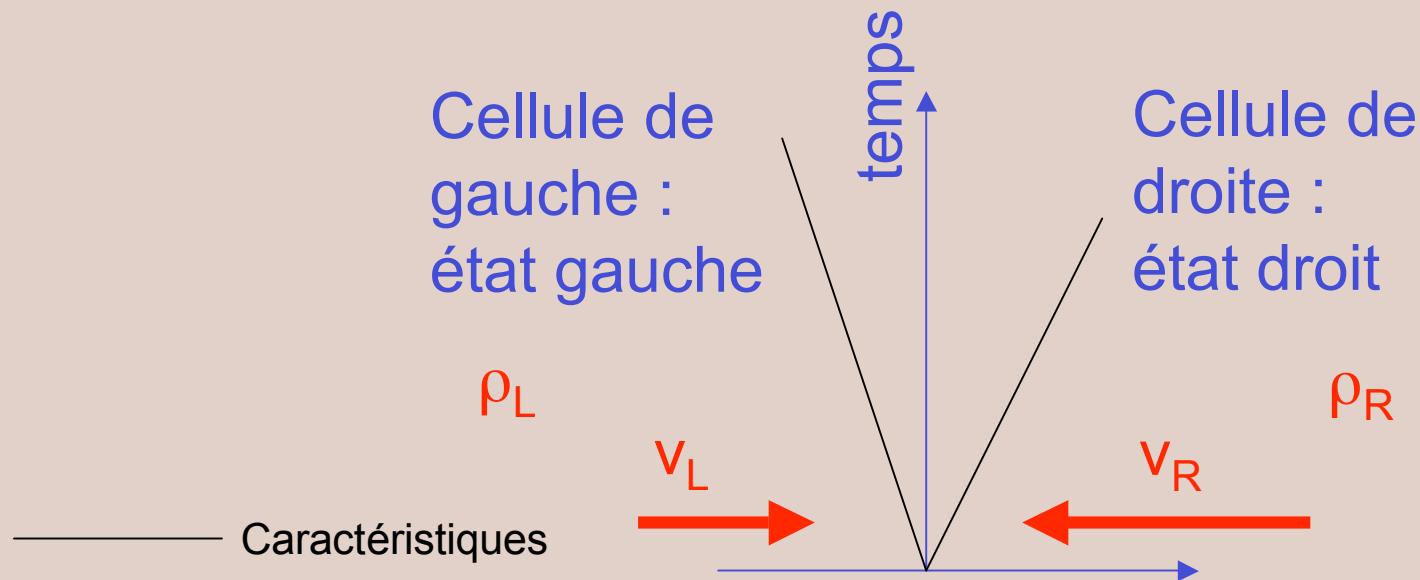
Codes à grille alternée :

ZEUS, NIRVANA, FARGO (code polaire 2D dédié), etc.

A ce jour, tous les résultats de simulations numériques publiés sur le problème des protoplanètes immergées, obtenus avec des codes à grille, l'ont été avec des codes à grilles alternées (sauf un -Nelson & Benz- → PPM ).

# Méthodes de type Godunov

Il existe un autre type de code à grille, plus récent, basé sur la résolution du problème de Riemann.



La résolution du problème de Riemann permet de donner une évaluation du flux (de masse, moment, énergie) à l'interface

# Méthodes de type Godunov

Avantages des méthodes de type Godunov:

Toutes les quantités, y compris les vitesses, sont centrées. Plus besoin de gérer des grilles alternées.

Meilleures propriétés de conservation (conservation de l'énergie).

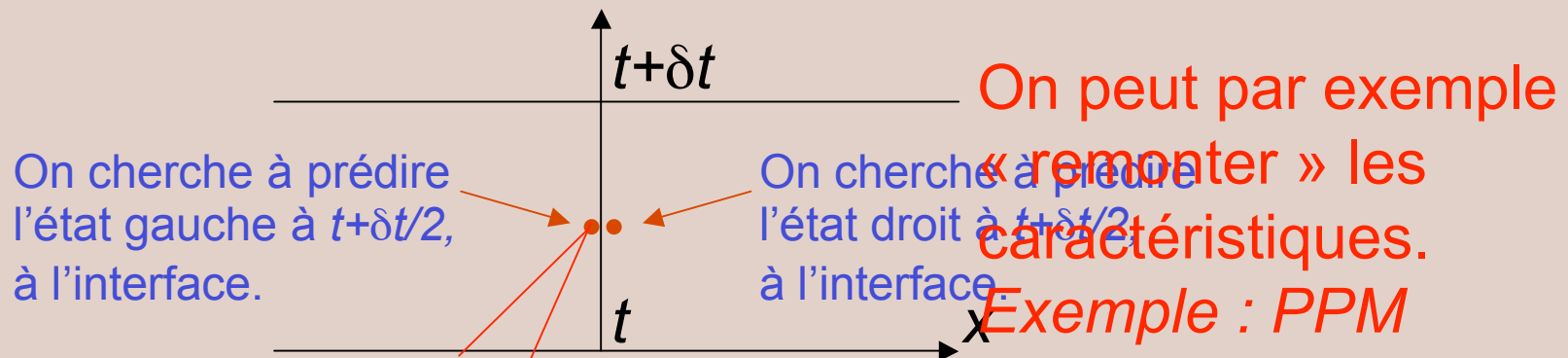
A taille de grille égale, meilleure résolution effective.  
(pas besoin de viscosité artificielle qui lisse les chocs).

Inconvénients :  
plus lents que les codes à grille alternées

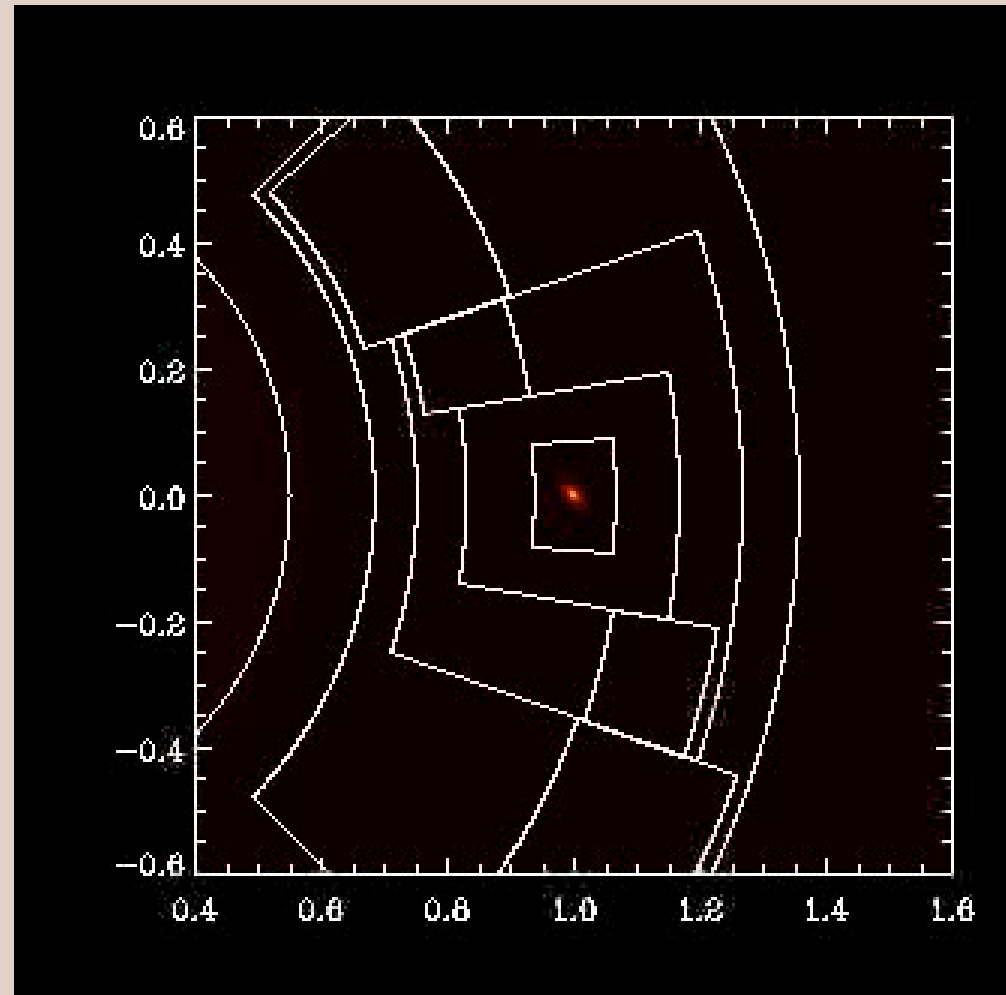
# Méthodes de type Godunov

Les deux parties importantes d'un code basé sur une méthode de type Godunov:

- le solveur de Riemann → il en existe une multitude, adaptés aux problèmes que l'on désire traiter.
- la prédiction des états gauche/droit: on n'utilise pas directement le contenu des cellules (ordre trop bas en temps et espace → trop diffusif).



# Sillage dans les méthodes de type Godunov



# Condition de Courant

Encore appelée condition CFL (Courant, Friedrich, Levy)

Les caractéristiques ne doivent pas se propager de plus d'une zone sur un pas de temps → limitation du pas de temps

$$\delta t < \delta x / \max(v + c_s)$$

Cette condition est particulièrement contraignante dans les disques Képlériens.

# Condition CFL en disque Képlérien

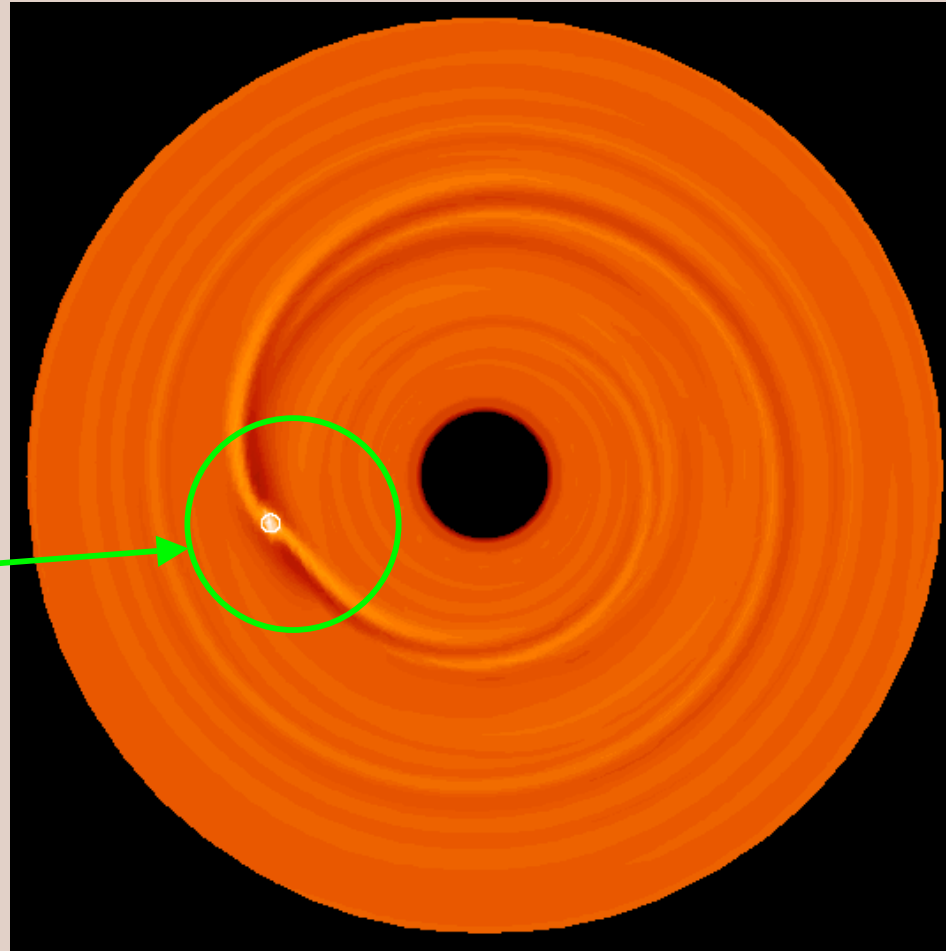
$$\delta t < \delta \phi / \Omega = \text{Cte} \times r^{3/2}$$

Terme très contraignant vers la frontière interne de la grille

$$\text{--ROI} = 1$$

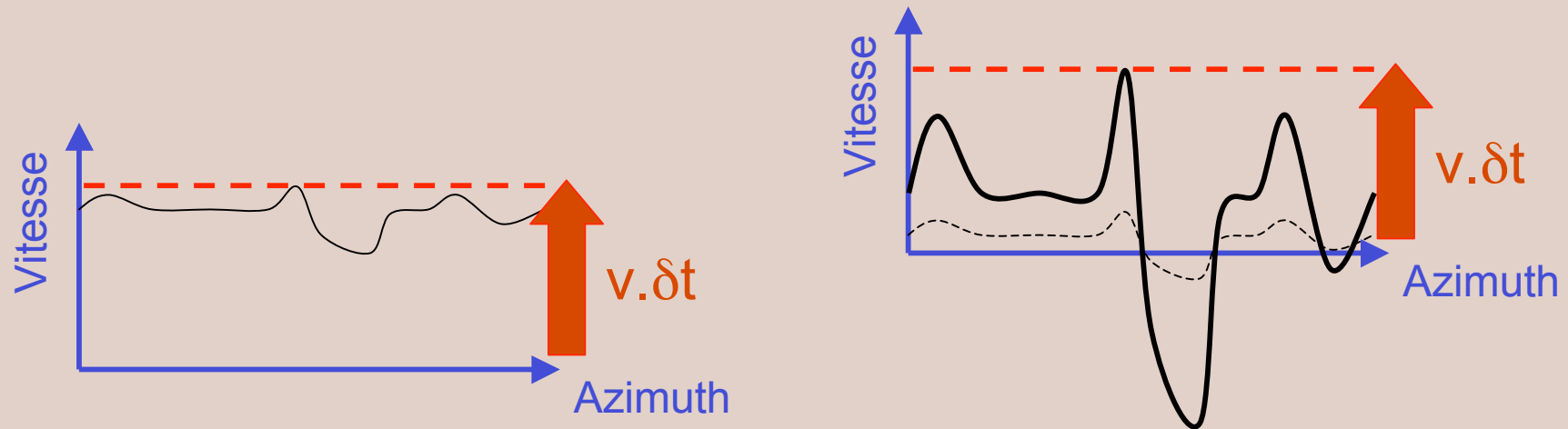
$$\text{--Inner Bound.} = 6.1$$

Région  
d'intérêt



# Advection azimuthale rapide

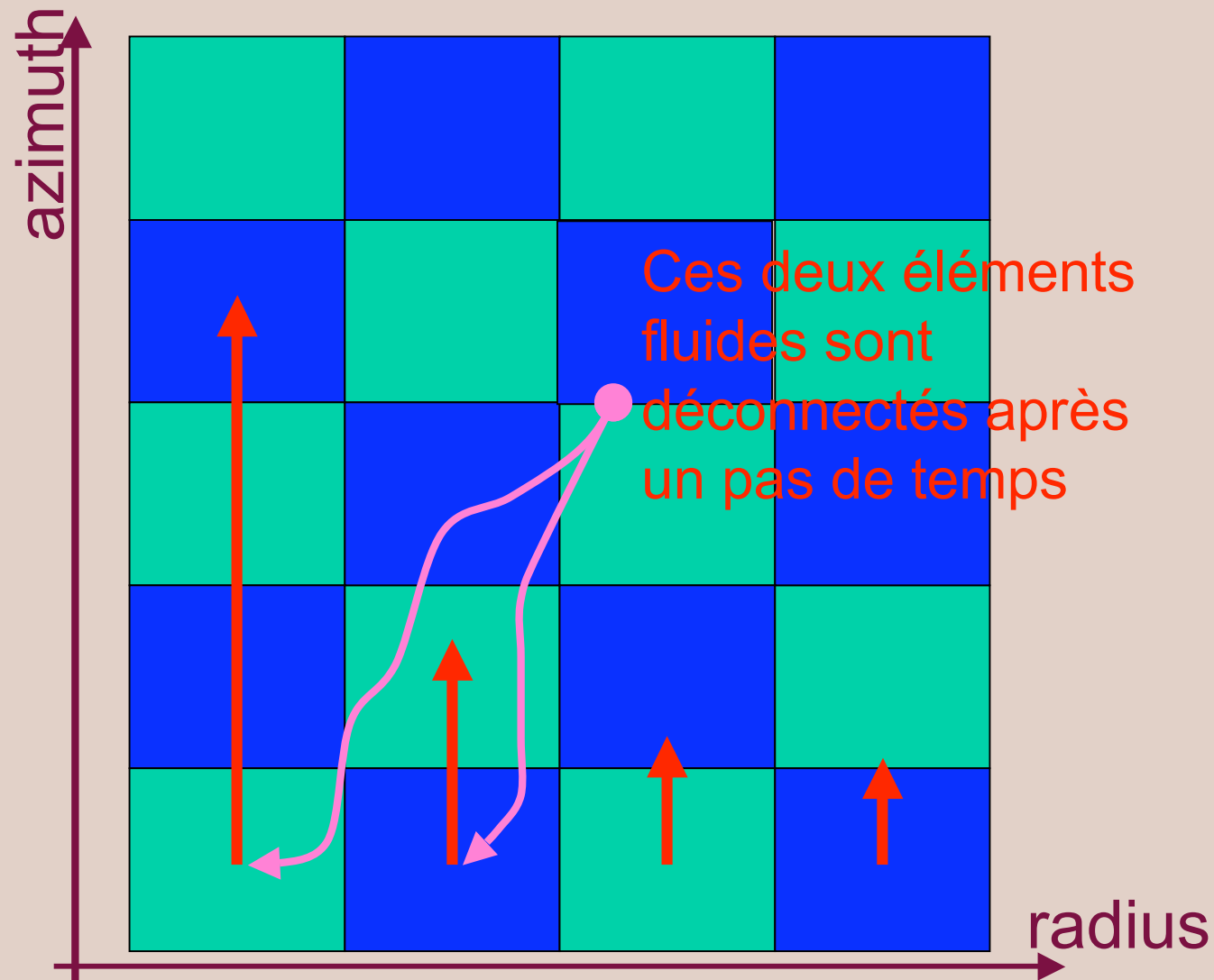
Il est beaucoup plus efficace de travailler sur les vitesses résiduelles en azimuth (cela revient, pour chaque anneau de cellules, à se placer dans un référentiel tournant).



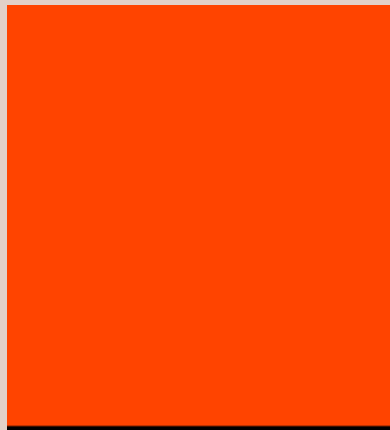
On peut ainsi utiliser des pas de temps beaucoup plus grands, à condition d'opérer sur les résultats un décalage correspondant à  $\langle v \rangle \times \delta t$



# Limite dûe au cisaillement



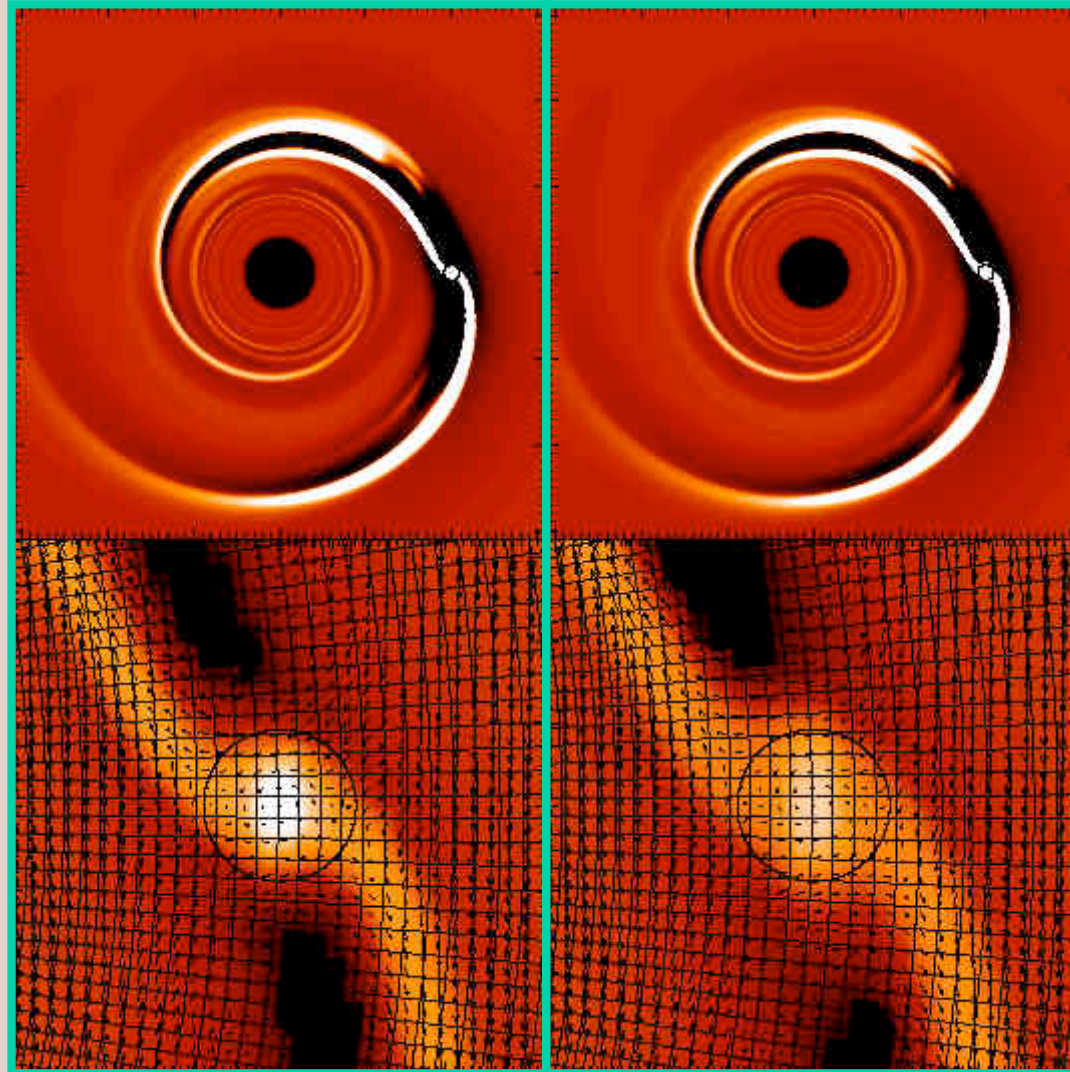
# Limite dûe au cisaillement



Apparition d'un « couplage rouge-noir » vers la frontière interne

# Exemple de gain en vitesse

FARGO



Standard

Gain de vitesse dans ce cas: 33

# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

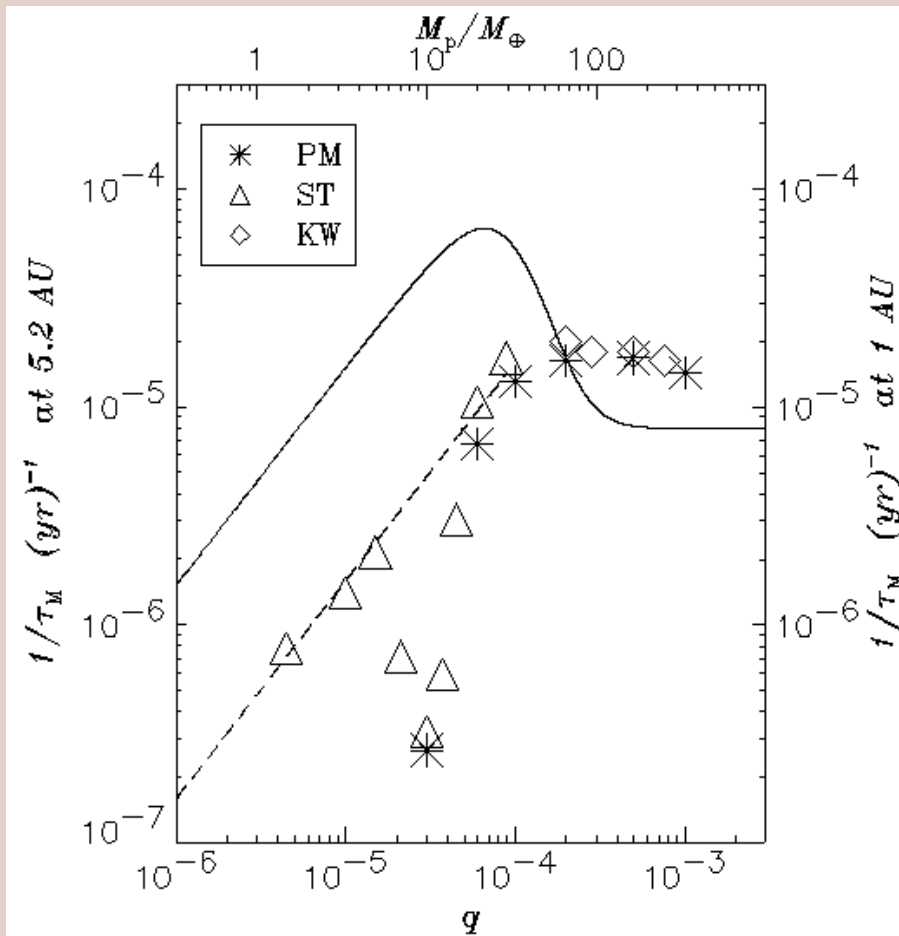
Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

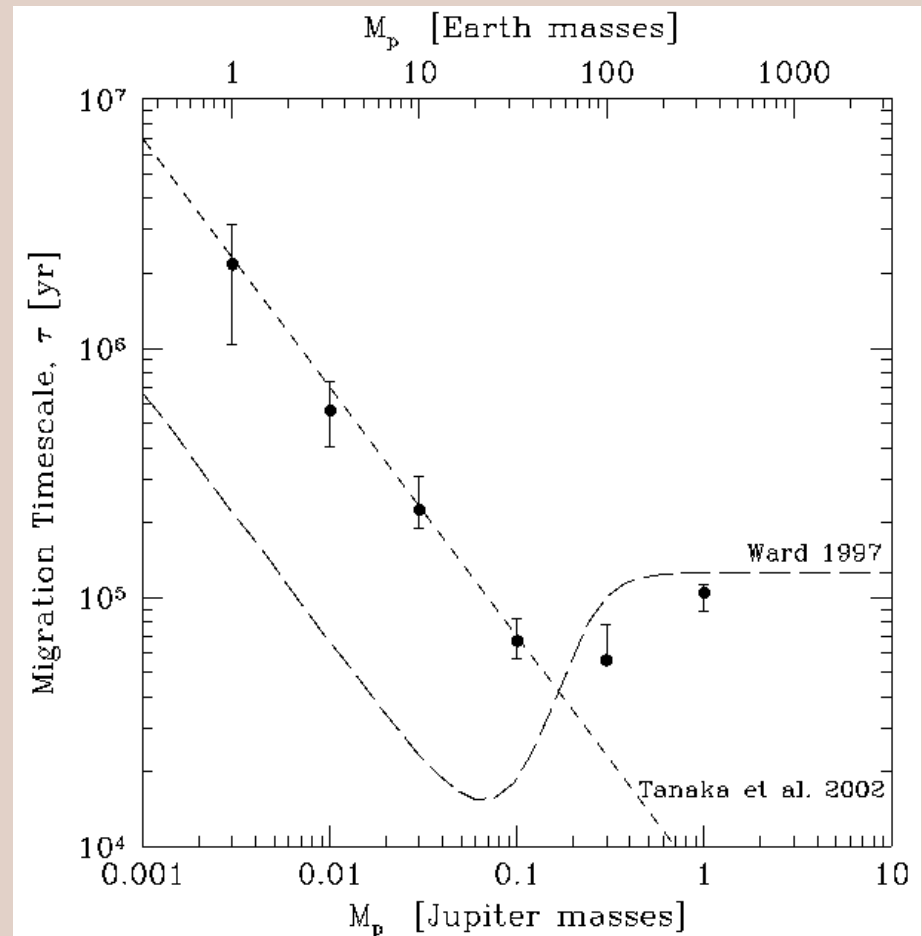
Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif

# Comparaison numérique / analytique



D'Angelo & al 2003



Bate & al 2003

Pas tout à fait la même chose mais presque

# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif

# Migration de deux planètes géantes

Exemple : système « Jupiter-Saturne » dans une nébuleuse protoplanétaire de densité surfacique uniforme.

On néglige l'accrétion du gaz sur ces objets

# Migration de deux planètes géantes

Jupiter va adopter une migration lente de type II

Saturne va migrer plus rapidement (type I... ou emballement)

Saturne va donc « rattraper » Jupiter.

Elle va aller se verrouiller sur une résonance de moyen mouvement avec Jupiter.

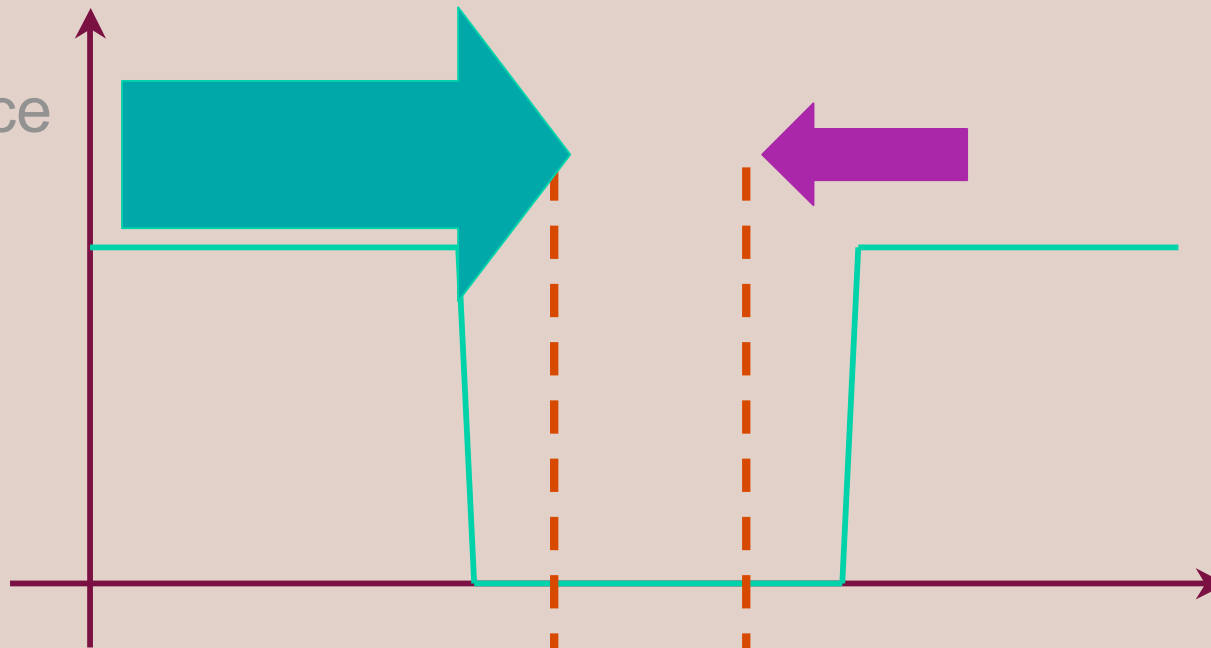
À ce moment-là, les sillons des planètes se superposent, donc on a un sillon commun.

Quelle va être l'évolution de ce système de deux planètes verrouillées en résonance, et possédant un sillon commun ?



# Migration de deux planètes géantes

Densité  
de surface



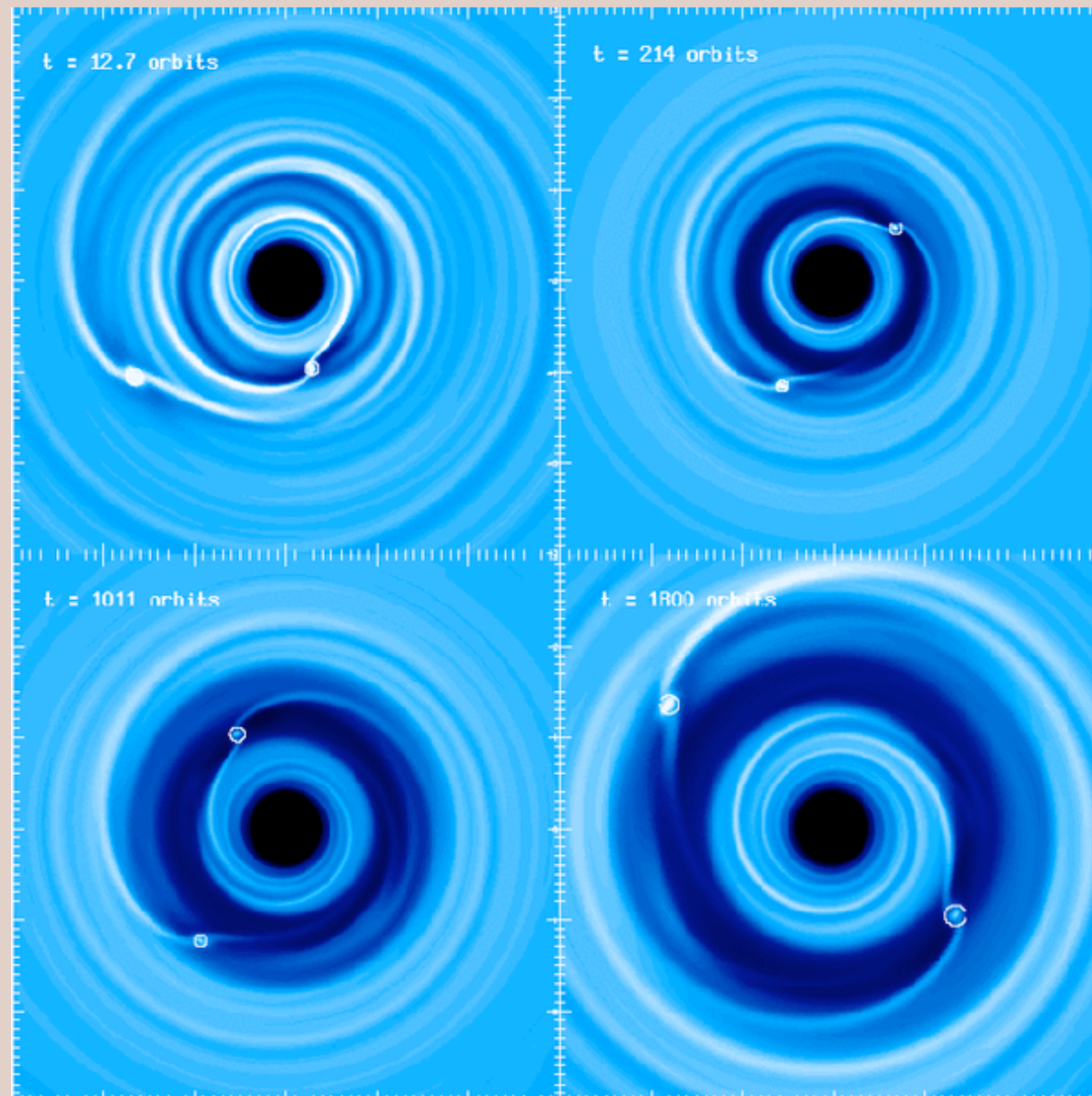
Distance à  
l'étoile

Le disque externe agit sur  
Saturne

Le disque interne agit sur  
Jupiter.

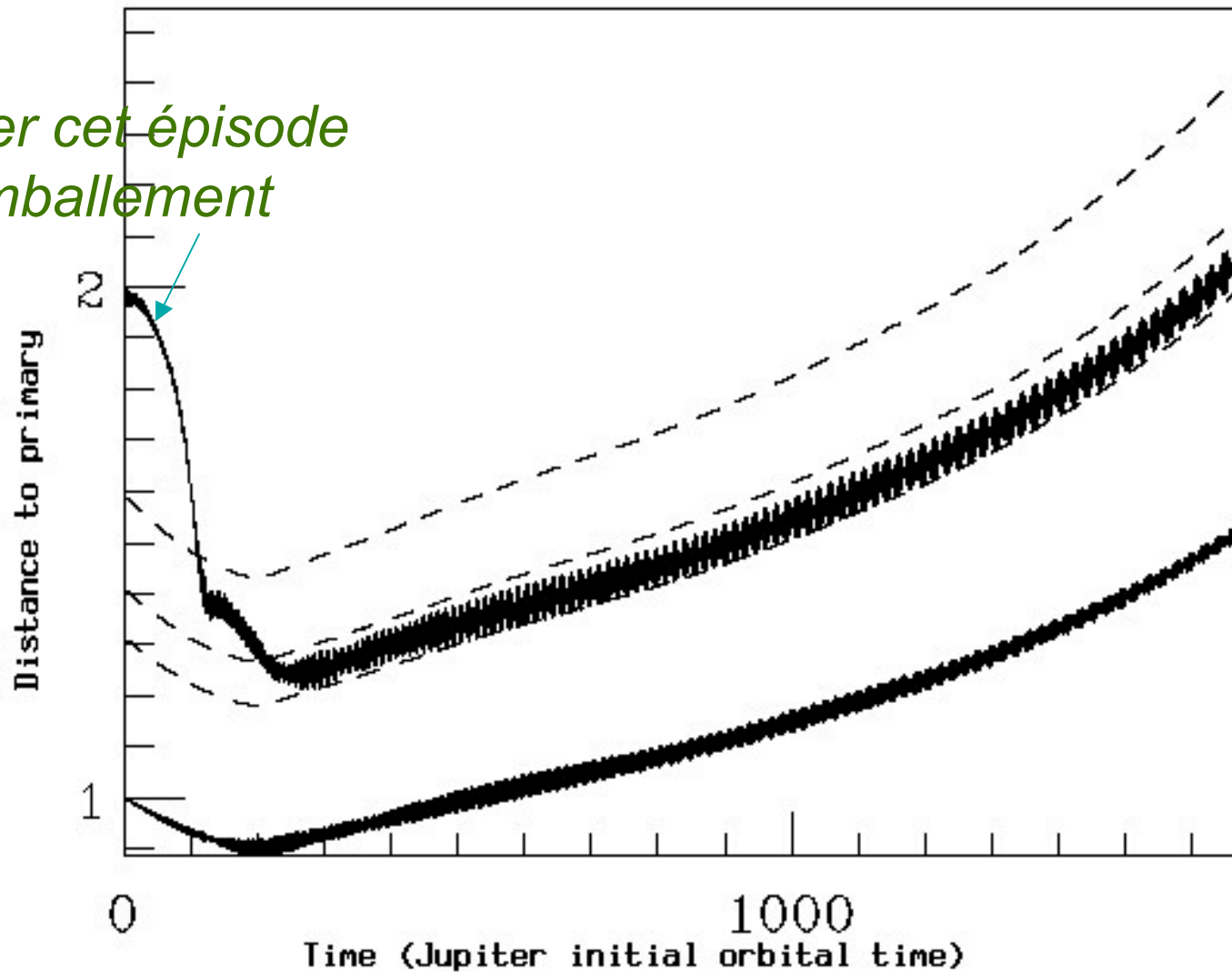
→ La migration doit se  
faire vers l'extérieur

# Migration de deux planètes géantes

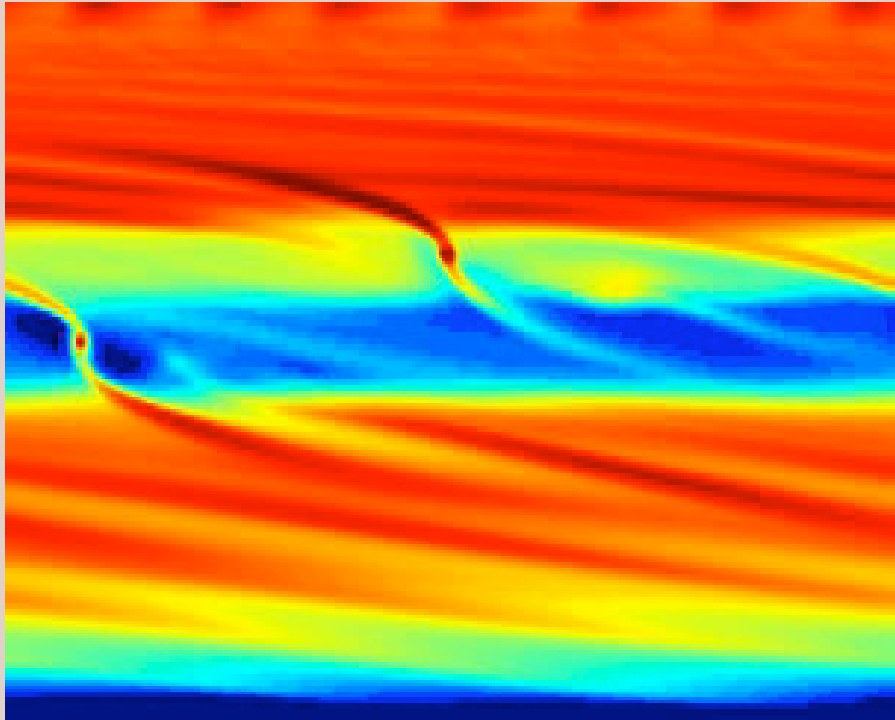


# Migration de deux planètes géantes

*Noter cet épisode d'emballement*



# Migration de deux planètes géantes

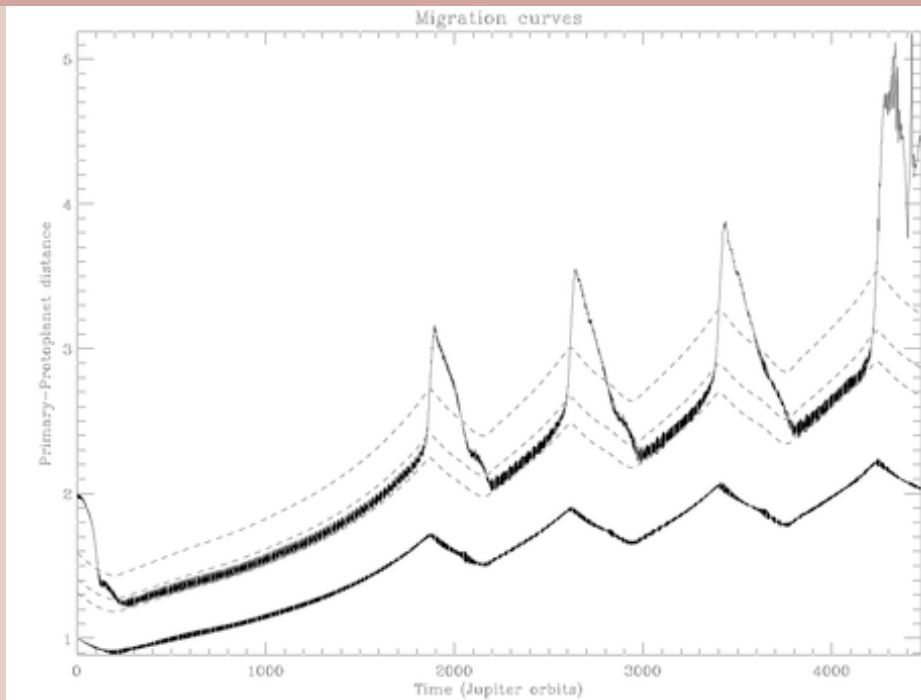


Jupiter et Saturne migrent de concert vers l'extérieur.

A un certain moment, la migration de Saturne s'emballe. Jupiter repart vers l'intérieur.

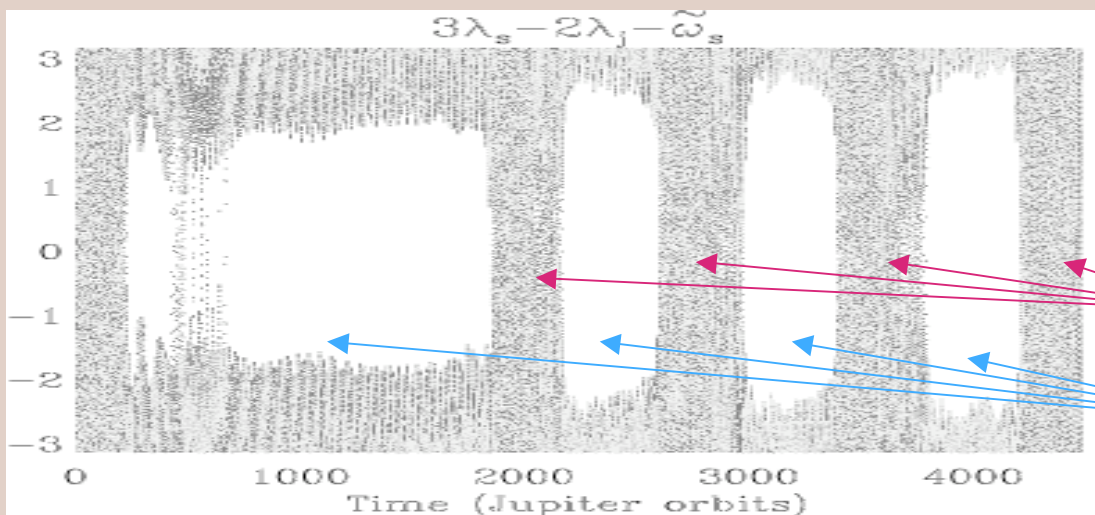
Le gap commun est beaucoup plus « sale » lorsque les deux planètes migrent de concert.

# Comportement à long terme



Succession  
d'emballements vers  
l'extérieur puis vers  
l'intérieur.

Il y a une légère  
dérive globale vers  
l'extérieur



*Emballement*

*Verrouillage en  
résonance (3:2)*

# Migration de deux planètes géantes

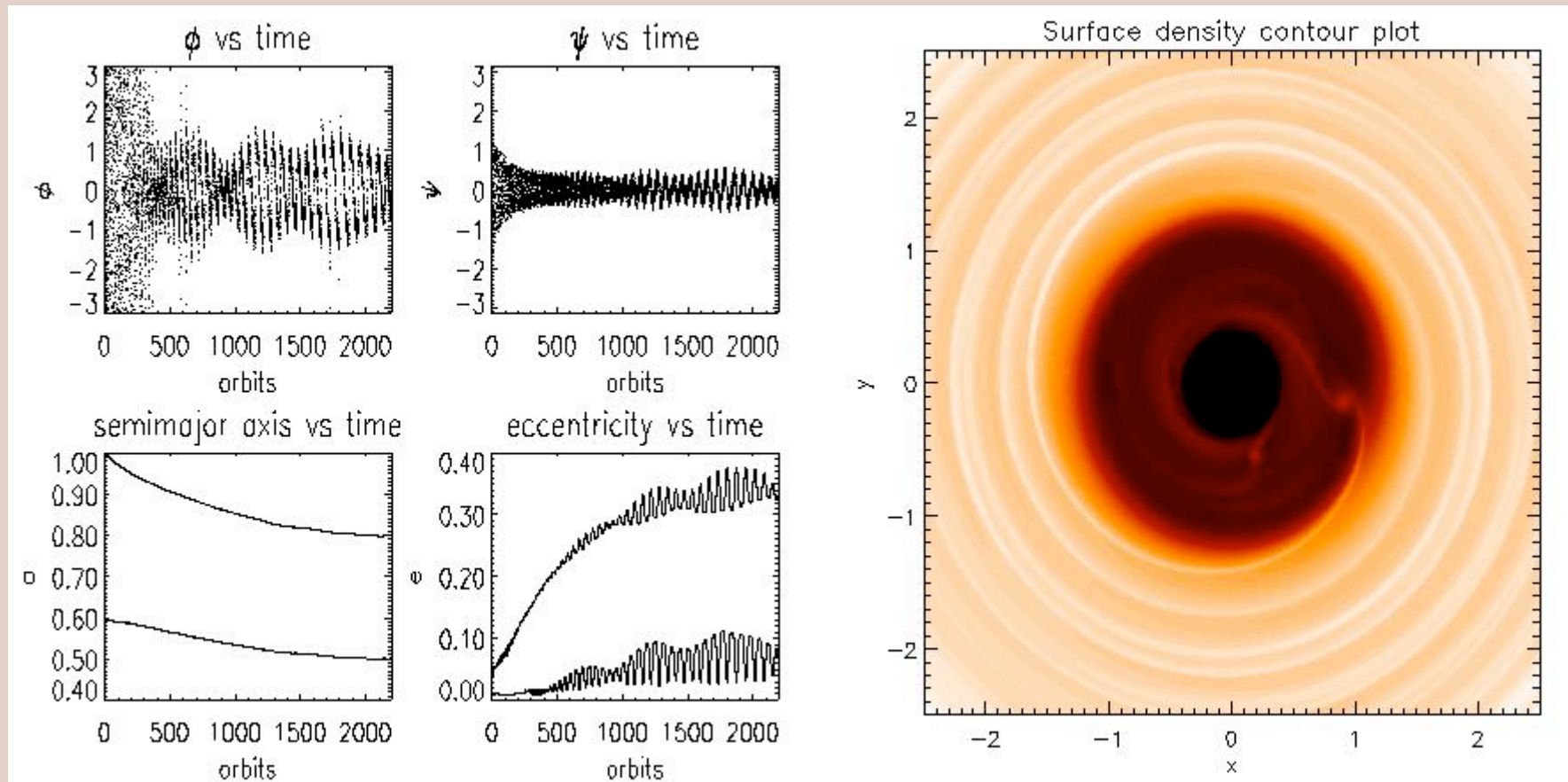
Les effets mutuels entre protoplanètes géantes peuvent donc modifier qualitativement leur migration

Le devenir du système à long terme (lorsque le gaz disparaît) est encore à étudier. Il peut être instable.

Dans ce cas, l'issue probable est que l'une des planètes est éjectée, et l'autre reste sur une orbite képlérienne excentrique.

Pourrait expliquer l'origine de l'excentricité des planètes extrasolaires qui n'ont pas migré jusqu'à l'étoile centrale ?

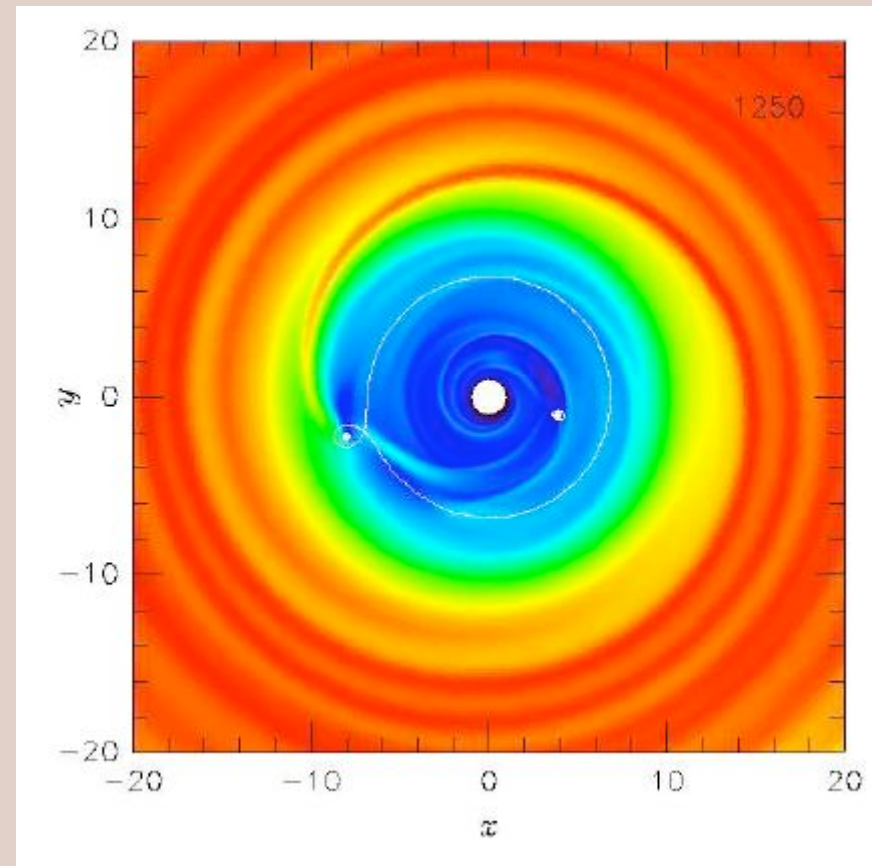
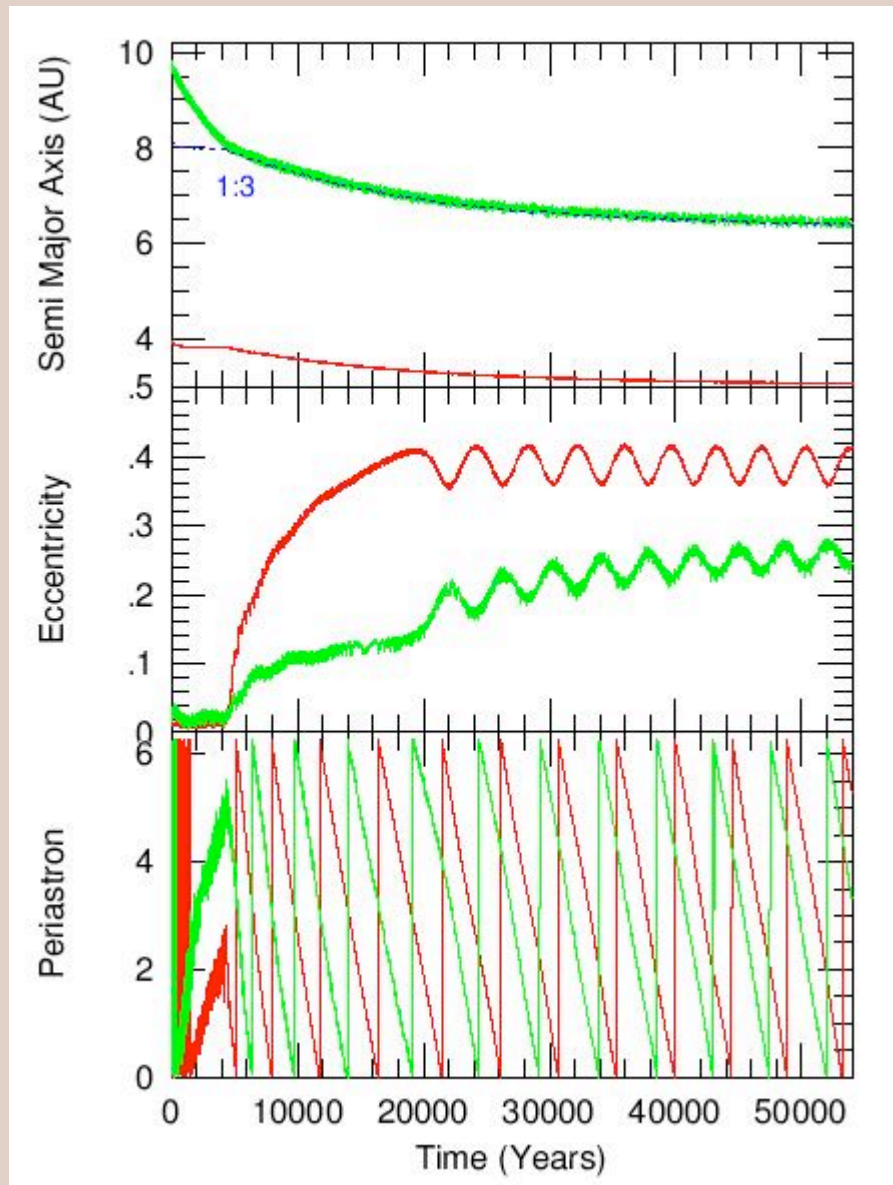
# Simulations d'un système existant : GJ876



*Snellgrove & al.*

But : on essaie de retrouver les excentricités observées.

# Simulations d'un système existant



*Kley & Bryden 2004*  
Les codes n'amortissent pas assez l'excentricité !



# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif

# Migration en présence de turbulence MHD

L'origine de la viscosité effective des disques protoplanétaires est vraisemblablement la turbulence MHD issue de l'*instabilité magnéto-rotationnelle (MRI)* découverte par Balbus & Hawley en 1991.

Décrire cette turbulence numériquement est un problème exigeant :

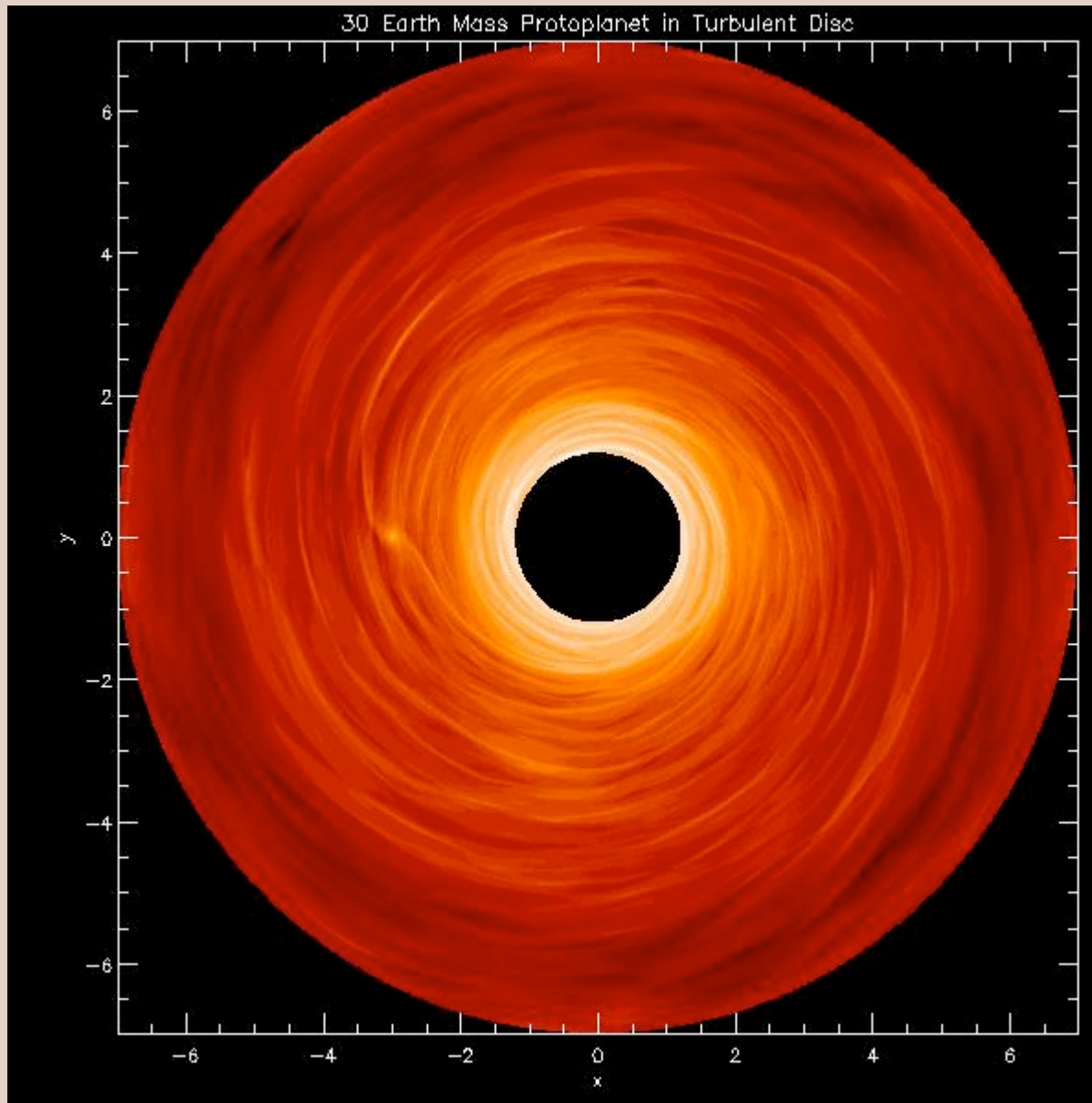
- champ magnétique,
- besoin d'une résolution élevée ( $< H$ )
- besoin d'une grande dynamique en rayons
- simulations nécessairement 3D

# Migration en présence de turbulence MHD

Il est donc difficile de réaliser des simulations de planètes immergées dans des disques investis par de la turbulence MHD (besoin d'un nombre d'orbites important, simulations nécessairement globales en azimuth).

Nelson, Papaloizou & Snellgrove (QMUL) se sont intéressés à ce problème

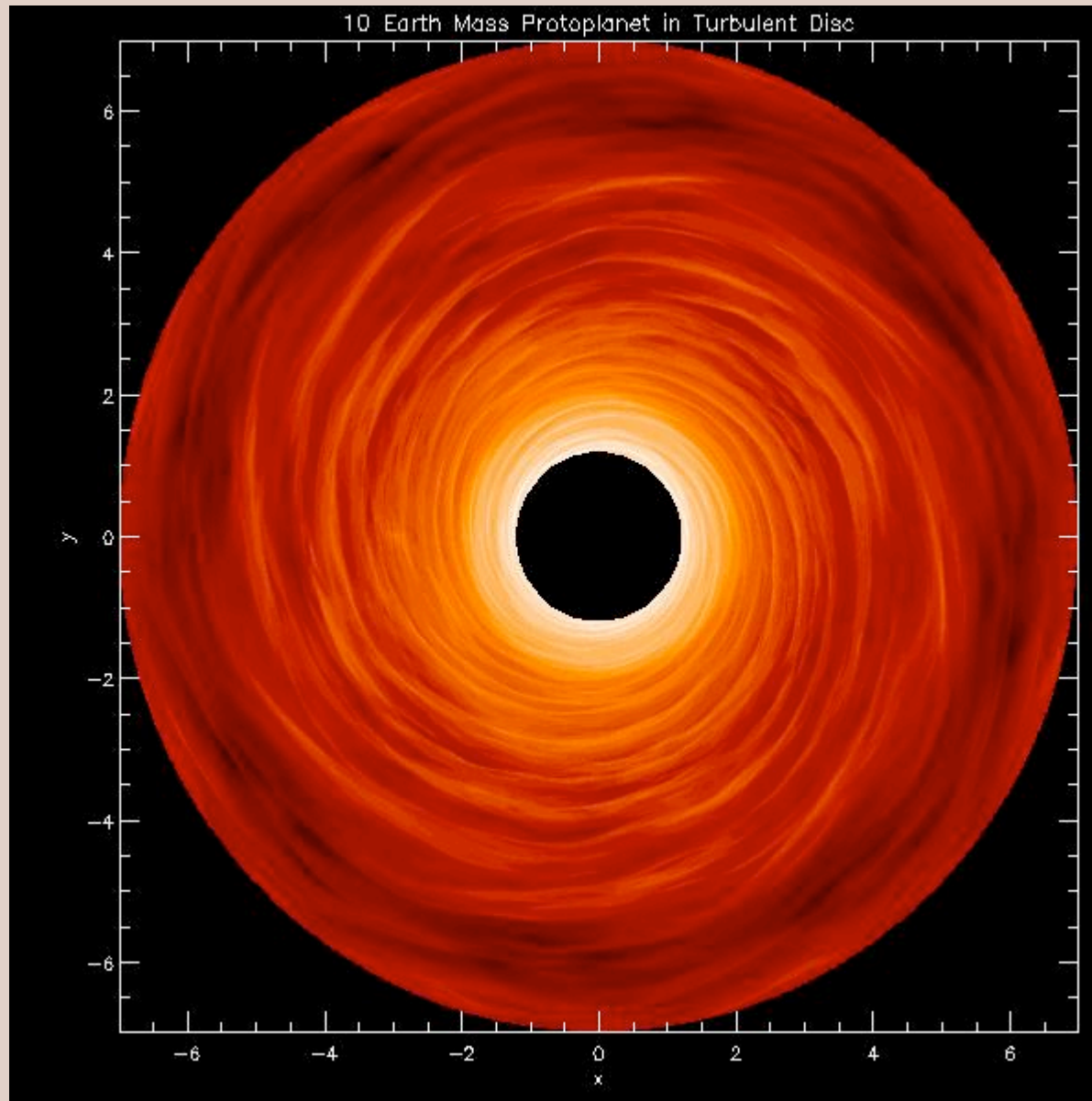
# Migration en présence de turbulence MHD



Planète de  $30 M_{\oplus}$   
immergée dans un  
disque protoplanétaire  
turbulent.

Le sillage est à peine  
apparent.

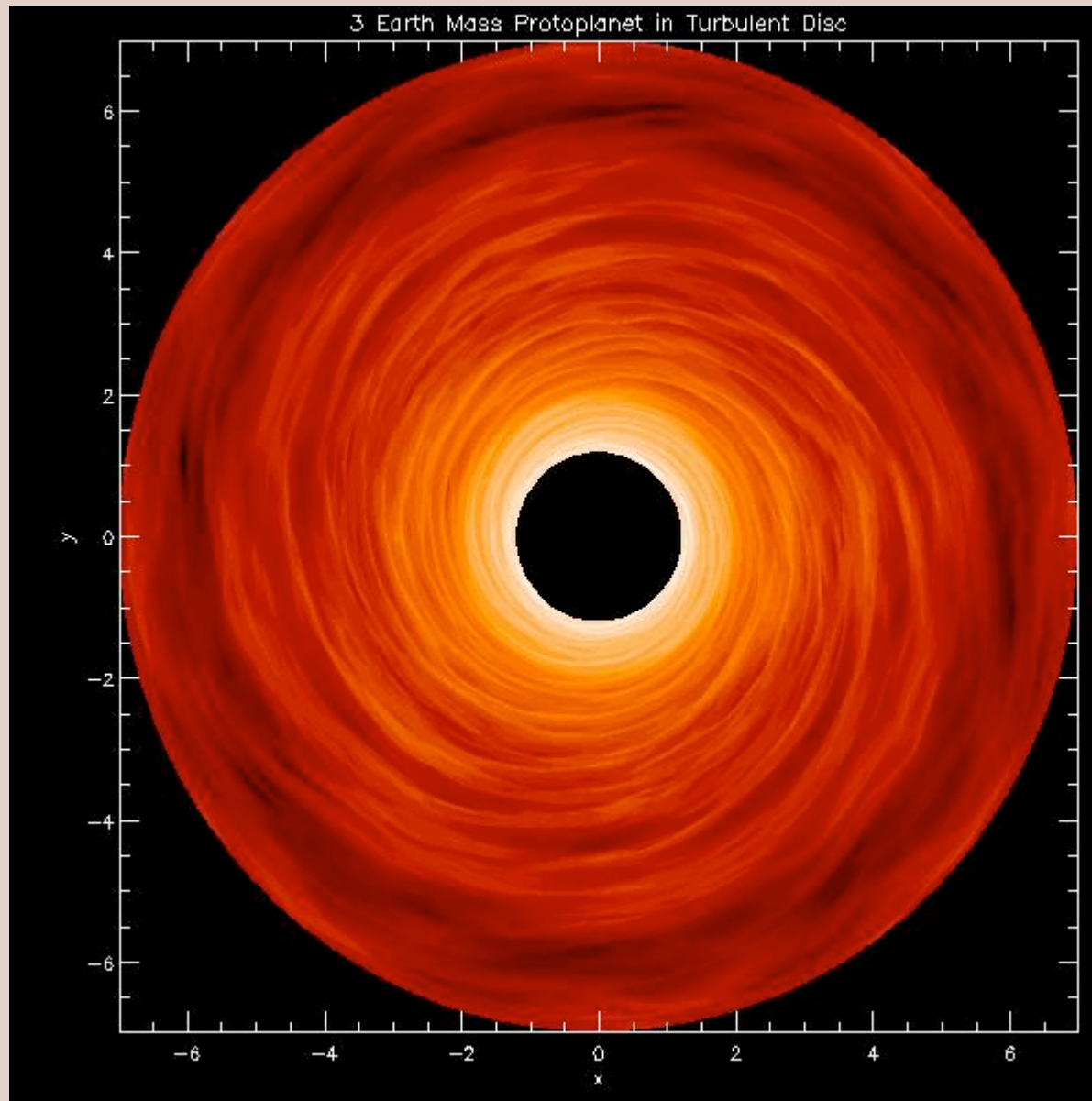
# Migration en présence de turbulence MHD



Planète de  $10 M_{\oplus}$   
immergée dans un  
disque protoplanétaire  
turbulent.

Le sillage a  
pratiquement disparu.

# Migration en présence de turbulence MHD

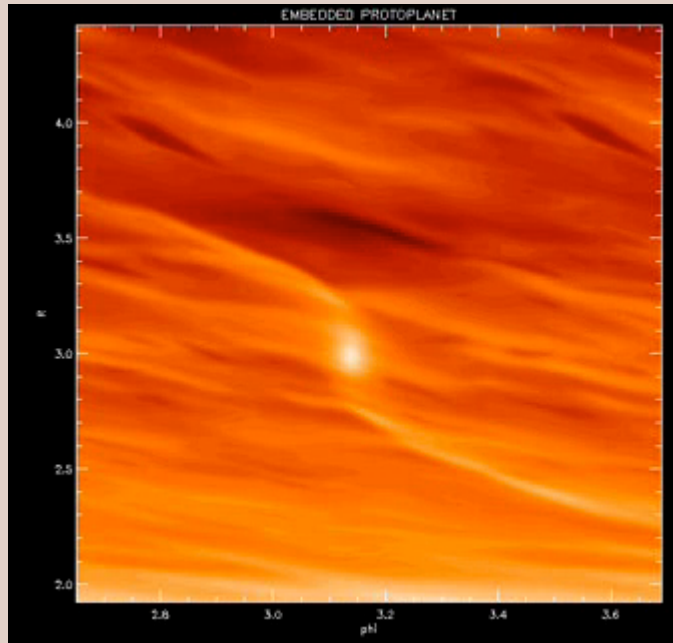


Planète de  $3 M_{\oplus}$   
immergée dans un  
disque protoplanétaire  
turbulent.

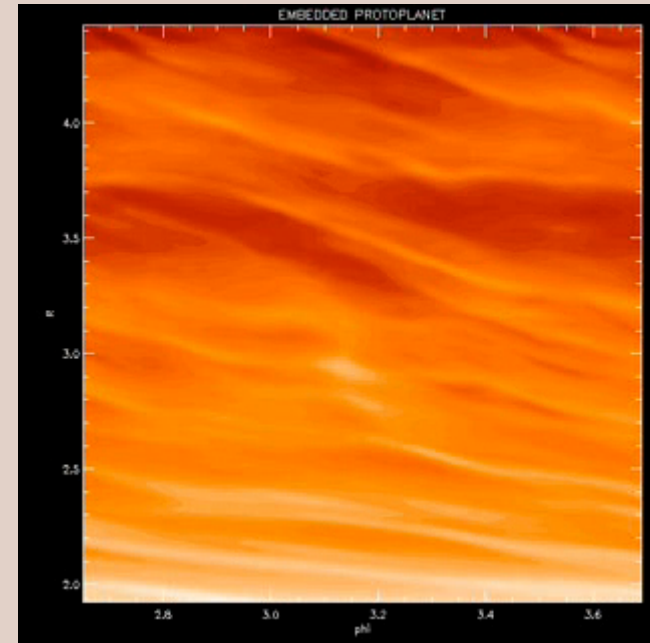
Le sillage n'est plus  
apparent.

Cela ne signifie pas  
qu'il a disparu, mais  
les perturbations de  
densité de surface sont  
dominées par les ondes  
MHD.

# Migration en présence de turbulence MHD



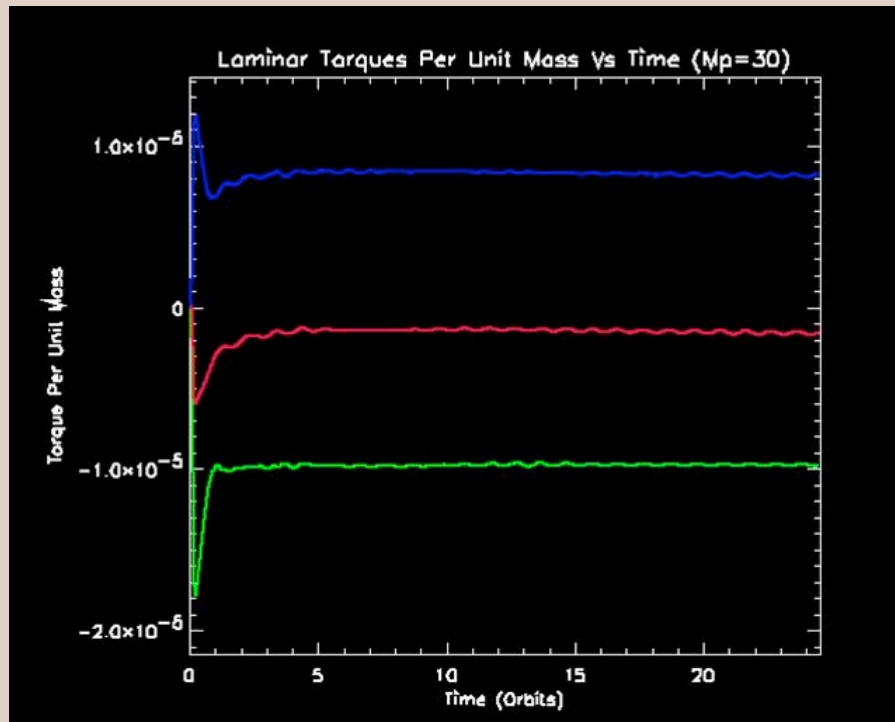
$30 M_{\oplus}$



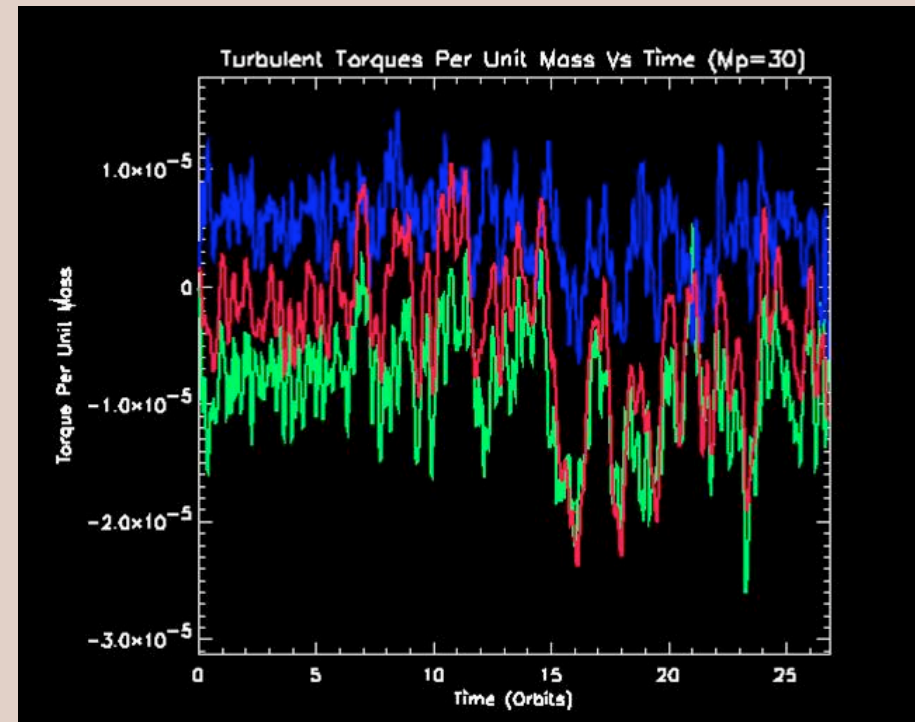
$10 M_{\oplus}$

Sillages + ondes MHD en représentation cartésienne

# Migration en présence de turbulence MHD



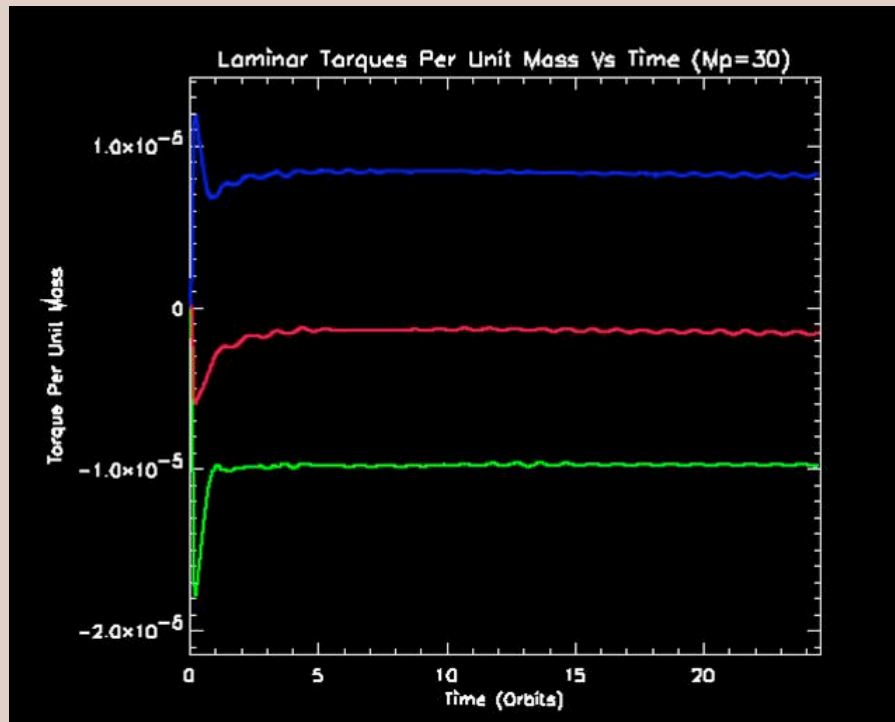
Couples (**externe**, **interne** et **total**) exercés sur une planète de  $30 M_{\oplus}$  dans un disque laminaire.



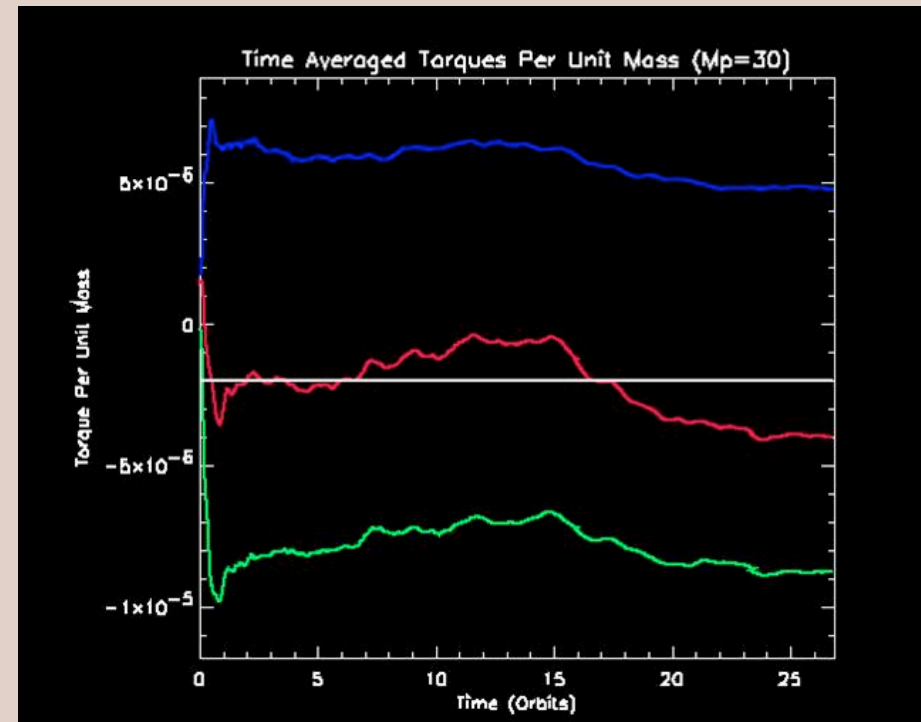
Même chose dans un disque turbulent  
→ On considère les moyennes temporelles.



# Migration en présence de turbulence MHD

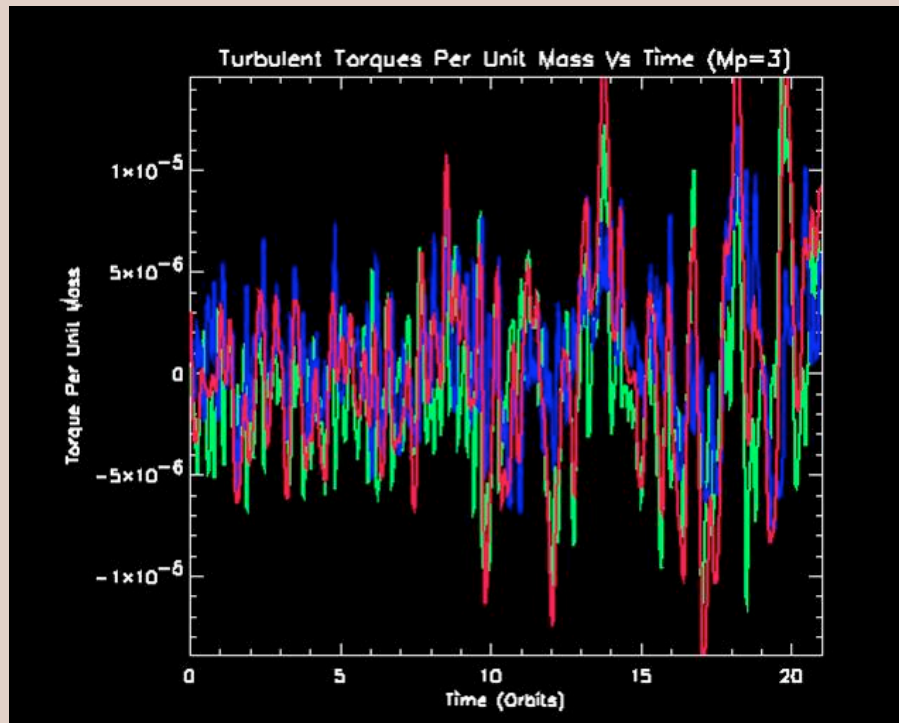


Couples (**externe**, **interne** et **total**) exercés sur une planète de  $30 M_{\oplus}$  dans un disque laminaire.

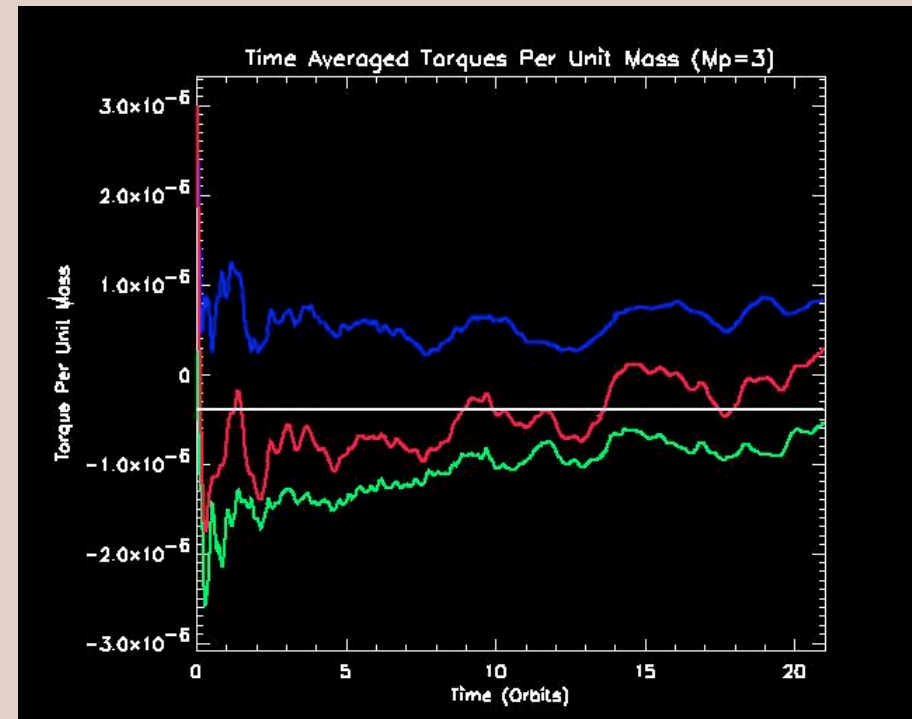


Moyennes temporelles des couples dans un disque turbulent (moyennés entre  $0$  et  $t$ ).

# Migration en présence de turbulence MHD



*Couple instantané*



*Couple moyenné*

Comportement similaire pour une planète de plus petite masse (ici  $3 M_{\oplus}$ ).

# Migration en présence de turbulence MHD

On voit que, sur le petit nombre d'orbites couvert par ces simulations (qui durent des mois sur des machines parallèles...), la migration peut avoir pour bilan net un déplacement vers l'extérieur... ou vers l'intérieur.

Le chemin suivi par le demi grand-axe  $a(t)$  s'apparente à une marche au hasard → migration diffusive.

Dans la limite  $M_p \rightarrow 0$ , les embryons planétaires tendraient à tous suivre une marche aléatoire de même loi.

# Migration en présence de turbulence MHD

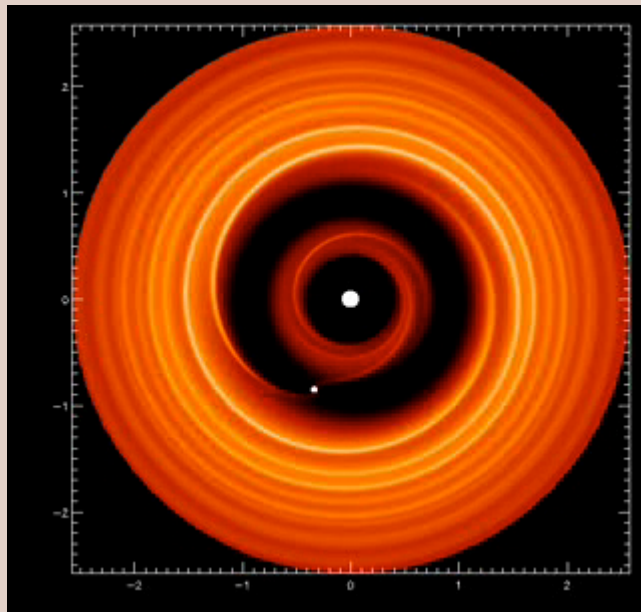
Questions ouvertes :

Qu'en est-il des effets de sillage « traditionnels » ?  
Viennent-ils simplement se superposer au couple  
bruité dû à la turbulence ?

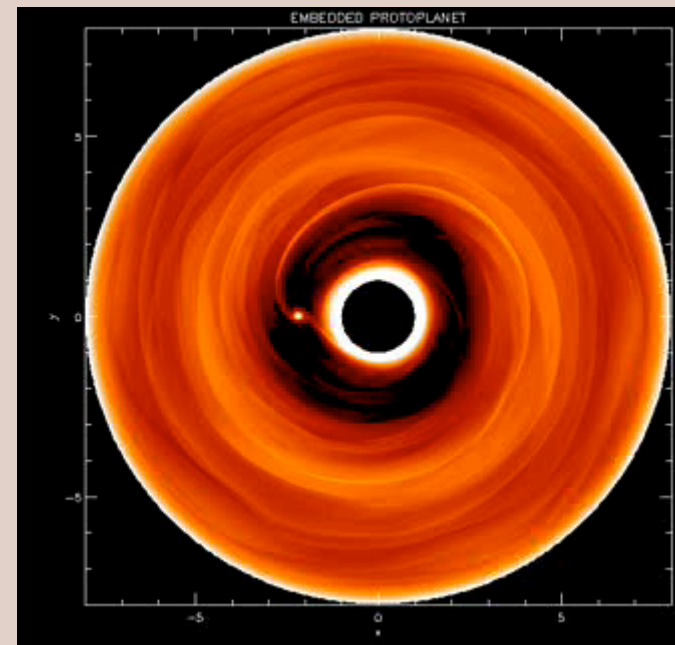
Résout ou exacerbe le problème de la migration  
trop rapide des protoplanètes de quelques masses  
terrestres ?

# Ouverture des gaps en disques turbulents

Les mêmes auteurs se sont penchés sur le problème de l'ouverture des gaps par des planètes géantes dans des disques « *MR* » turbulents.



Planète géante en disque laminaire

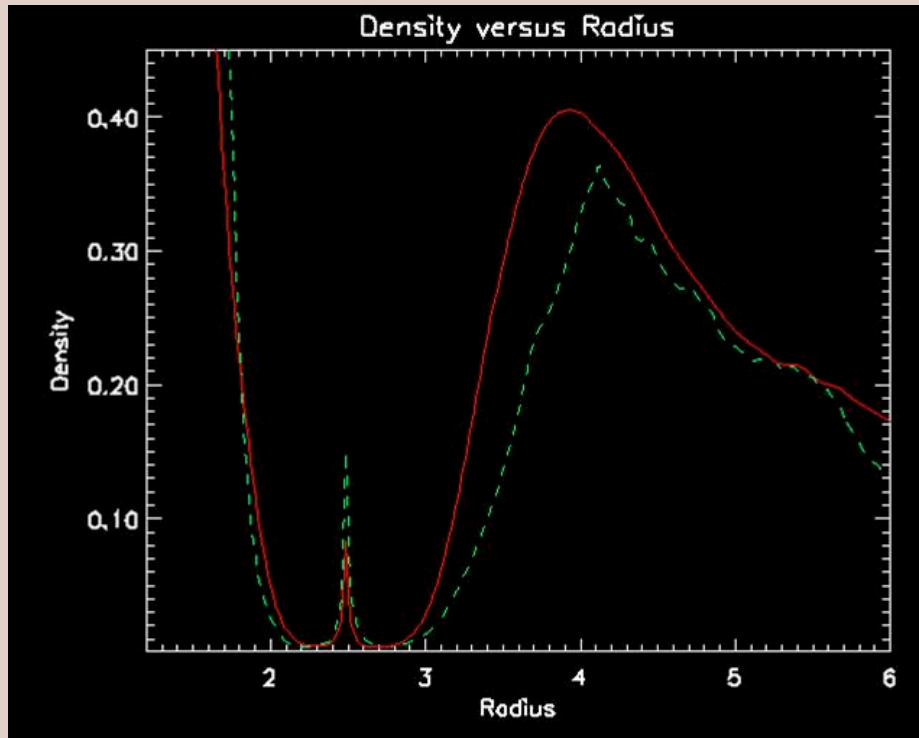


Planète géante en disque turbulent

# Ouverture des gaps en disques turbulents

Sillage moins bien défini que dans le cas laminaire.

À viscosité effective égale, le gap dans un disque turbulent est plus large que dans un disque laminaire (surprenant !...)

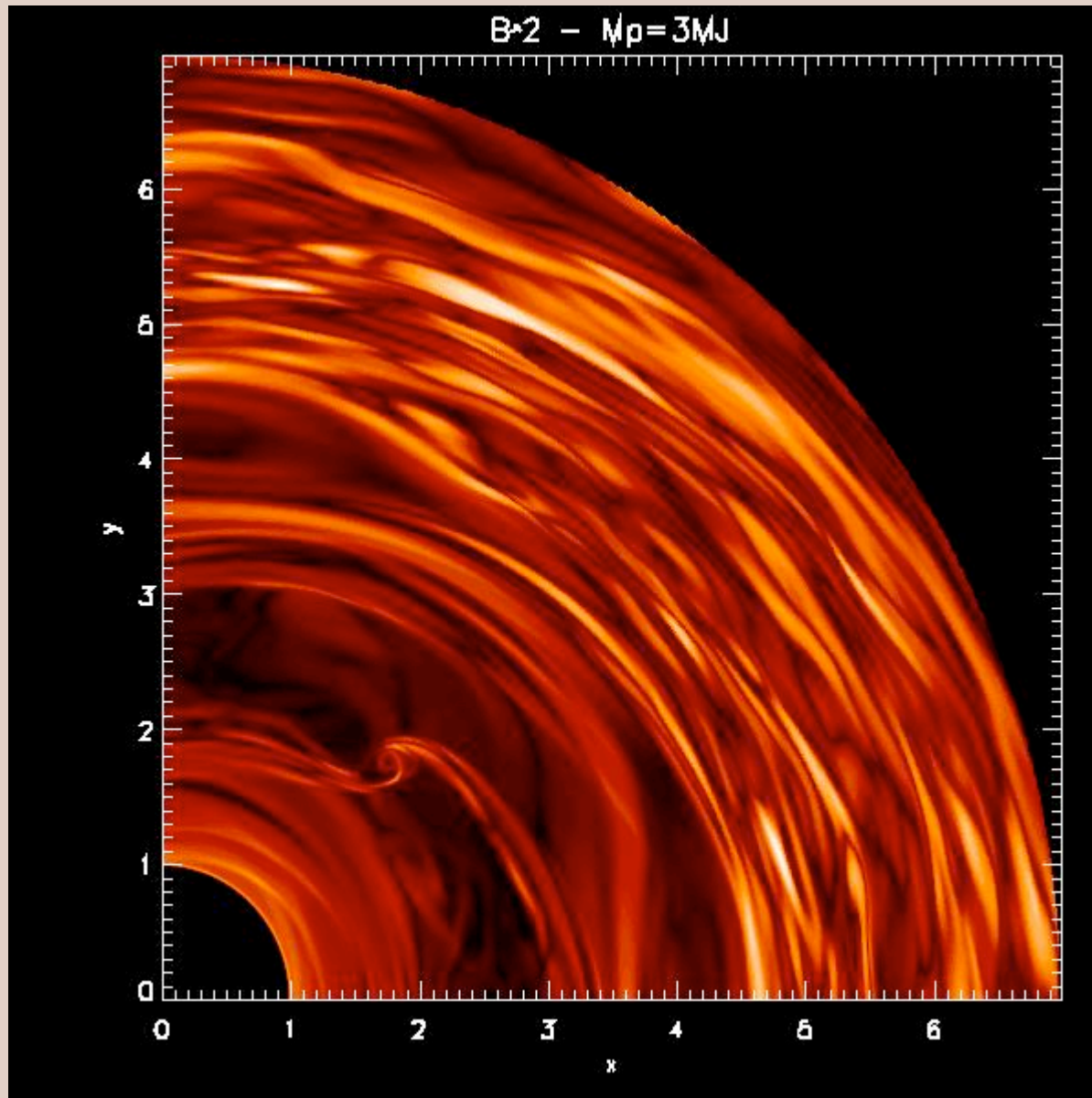


— Disque laminaire

- - - Disque turbulent

Il semble que la planète inhibe, au moins partiellement, la turbulence dans le voisinage de son orbite.

# Ouverture des gaps en disques turbulents



Energie magnétique  
dans le voisinage  
d'une planète de  
de masse  $M = 3 M_J$ .

# Troisième session : simulations numériques

Quelques généralités sur les simulations numériques

Comparaisons analytique / numérique

Migration d'un système de deux planètes

Migration dans un disque turbulent

Migration et transfert radiatif



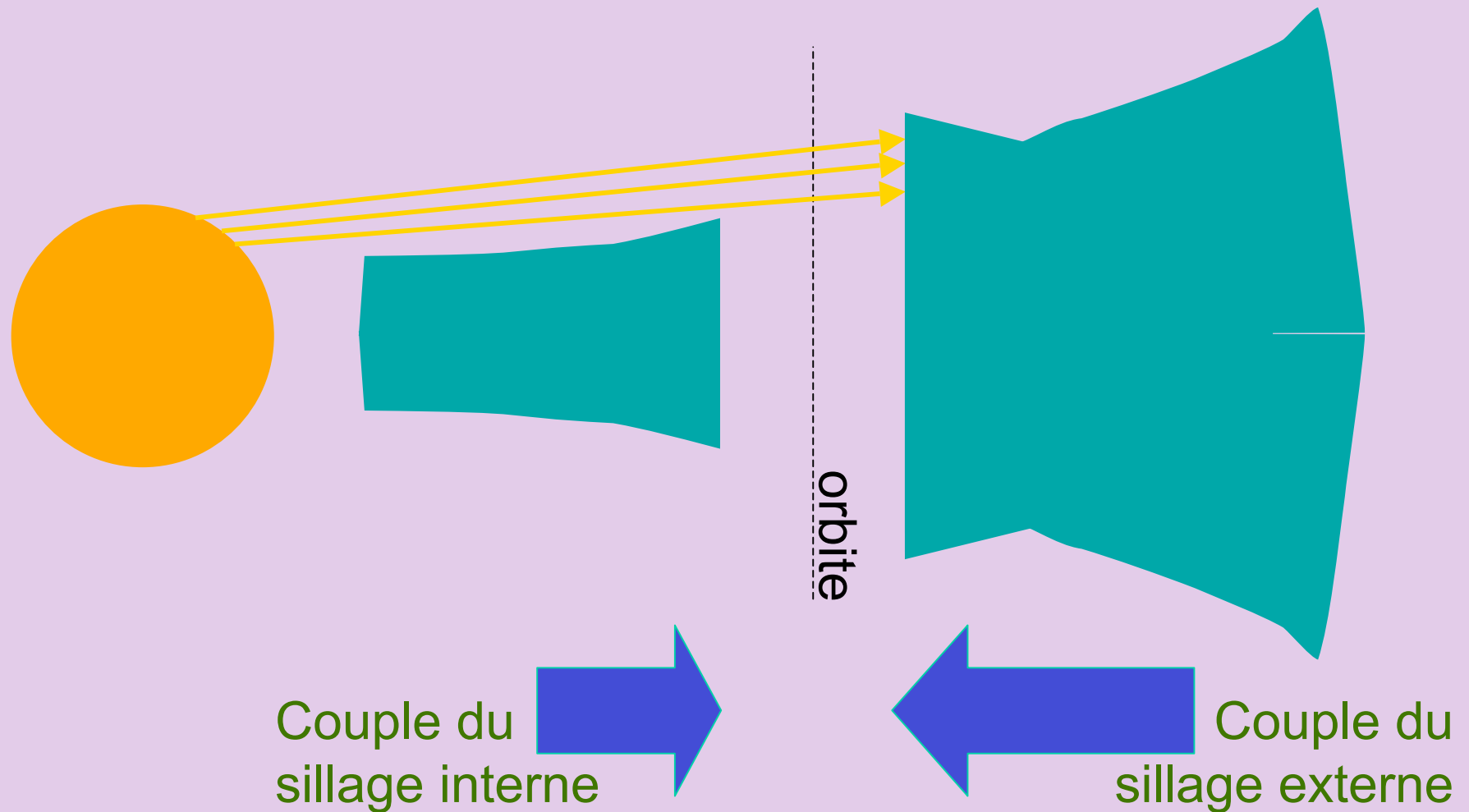
# Migration de type II et irradiation des disques



$$H/R \propto R^{2/7}$$

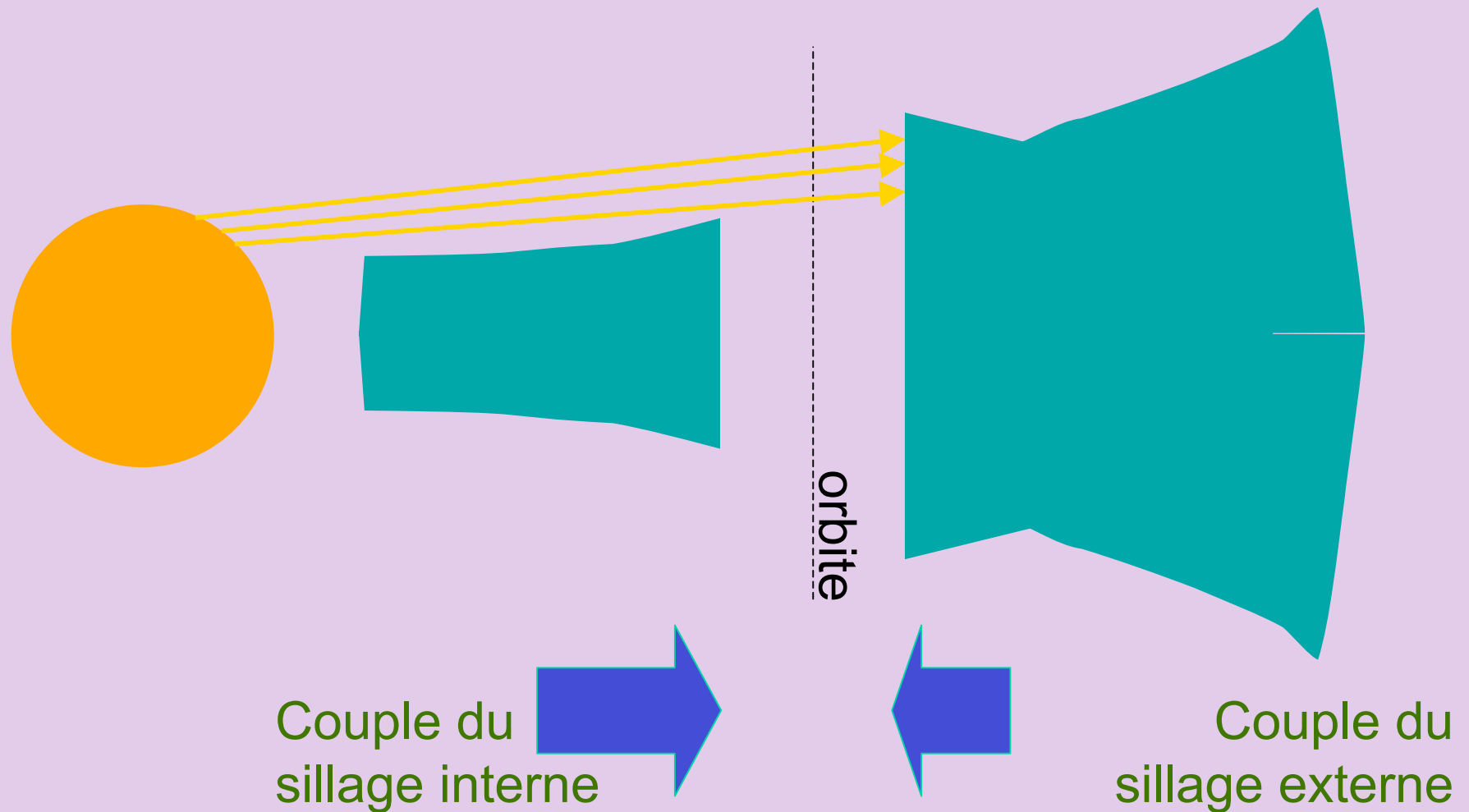
# Migration de type II et irradiation des disques

Que se passe-t-il si on ouvre un gap dans un tel disque ?

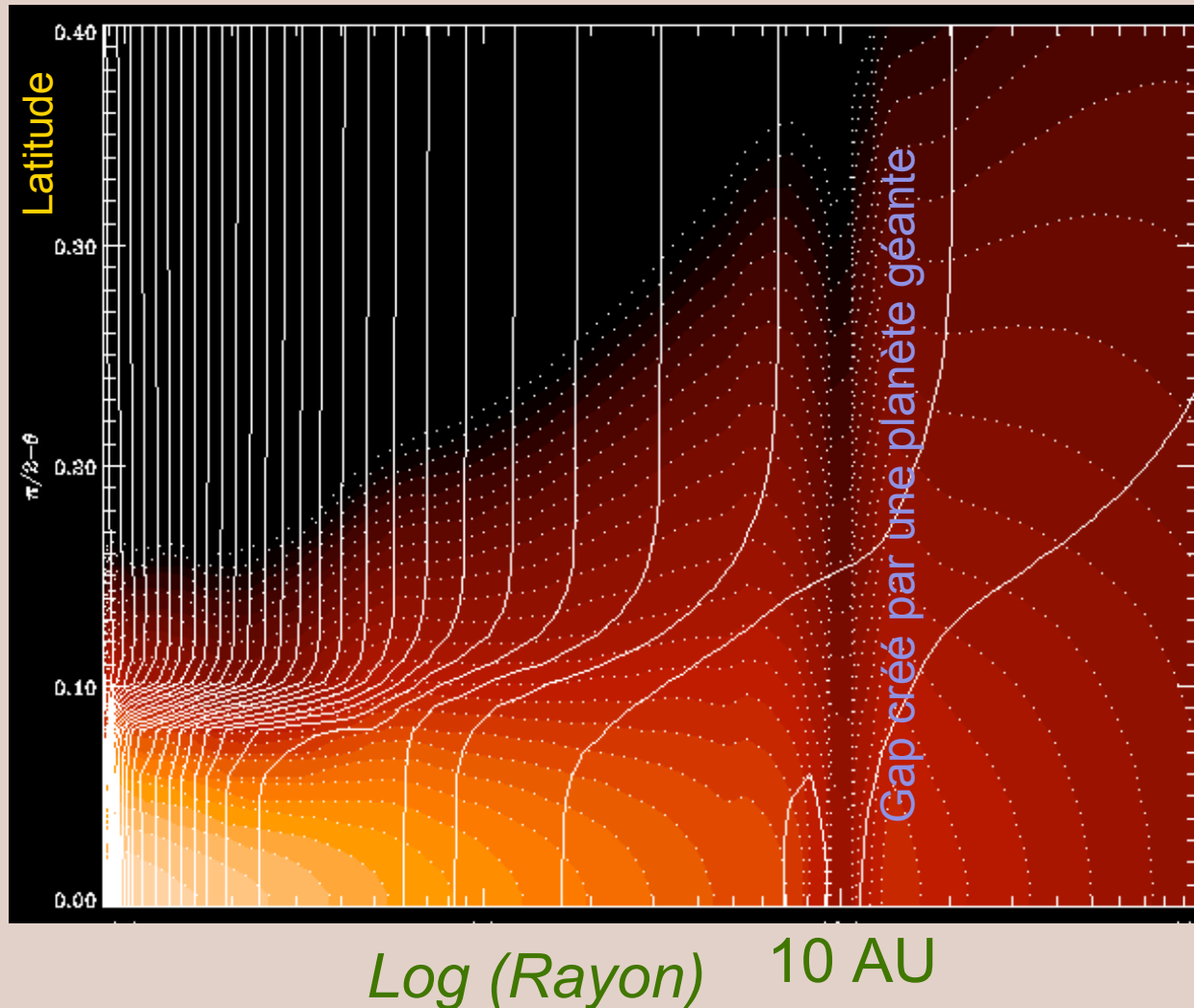


# Migration de type II et irradiation des disques

Que se passe-t-il si on ouvre un gap dans un tel disque ?



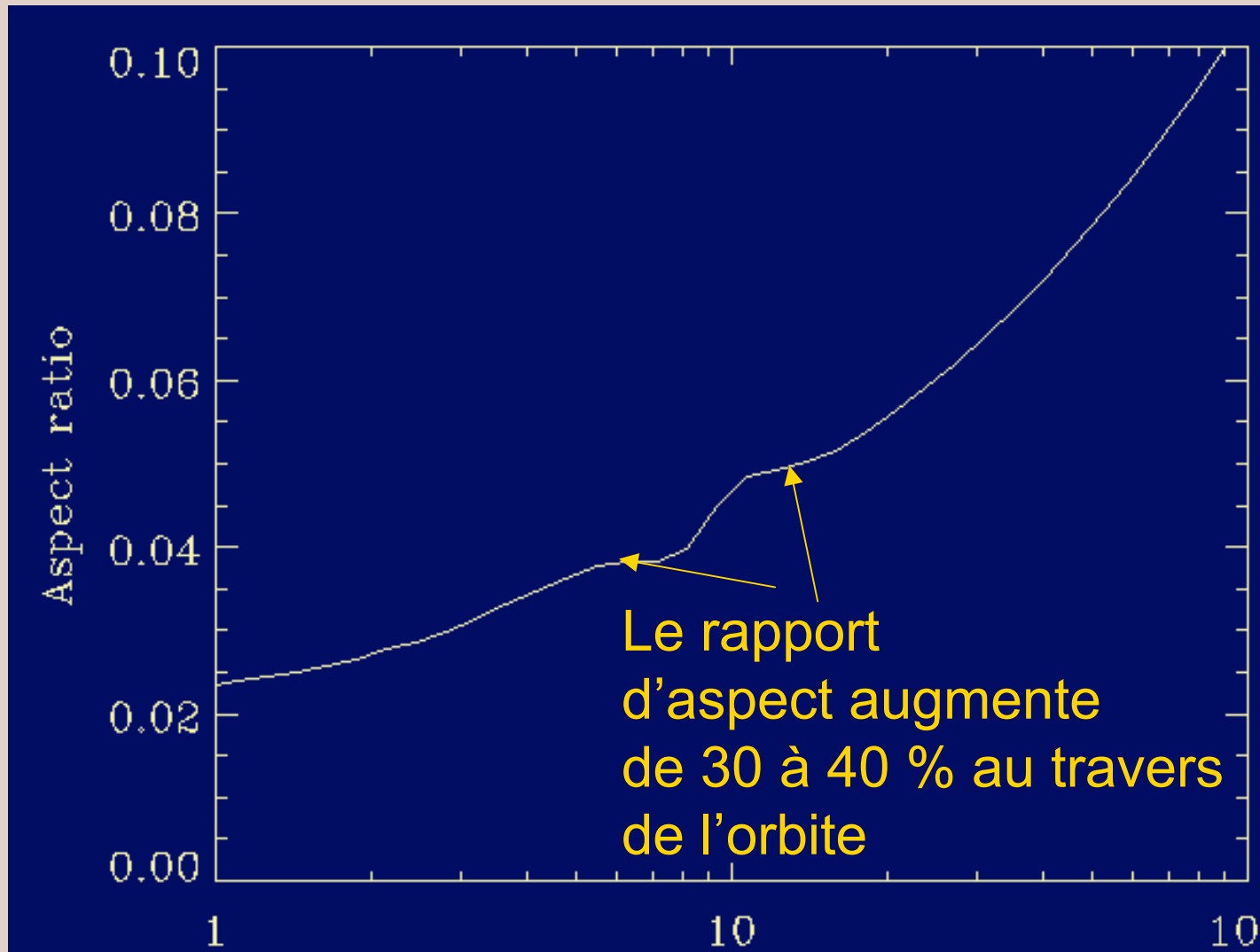
# Migration de type II et irradiation des disques



Masset, Dullemond, Bouwman & Audit, travail en cours.

Simulations mixtes hydro + transfert radiatif (méthode du tenseur variable d'Eddington).

# Migration de type II et irradiation des disques



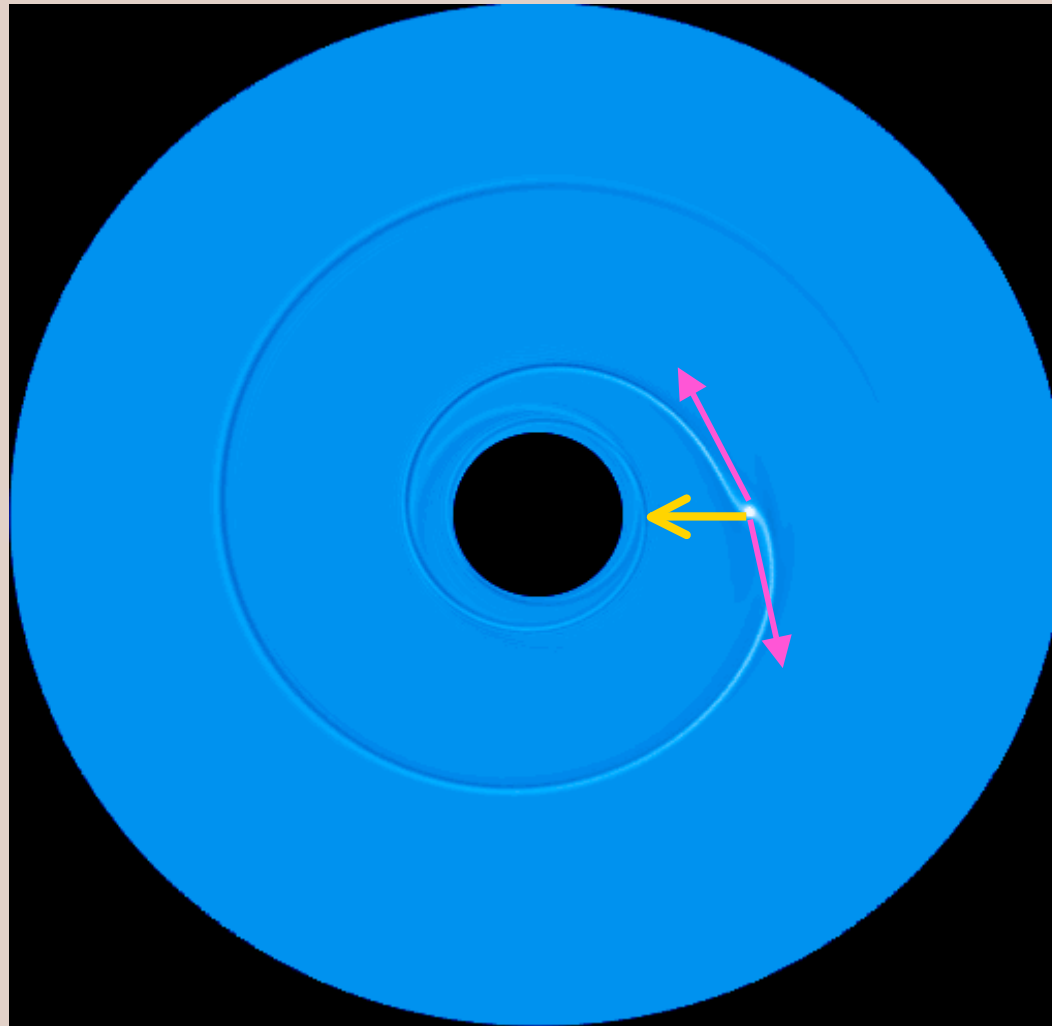
Le rapport d'aspect augmente de 30 à 40 % au travers de l'orbite

Le couple sur la planète peut s'annuler, ou devenir positif.

Est-ce suffisant pour garantir que la planète ne migrera plus vers l'intérieur?

Rayon (AU)

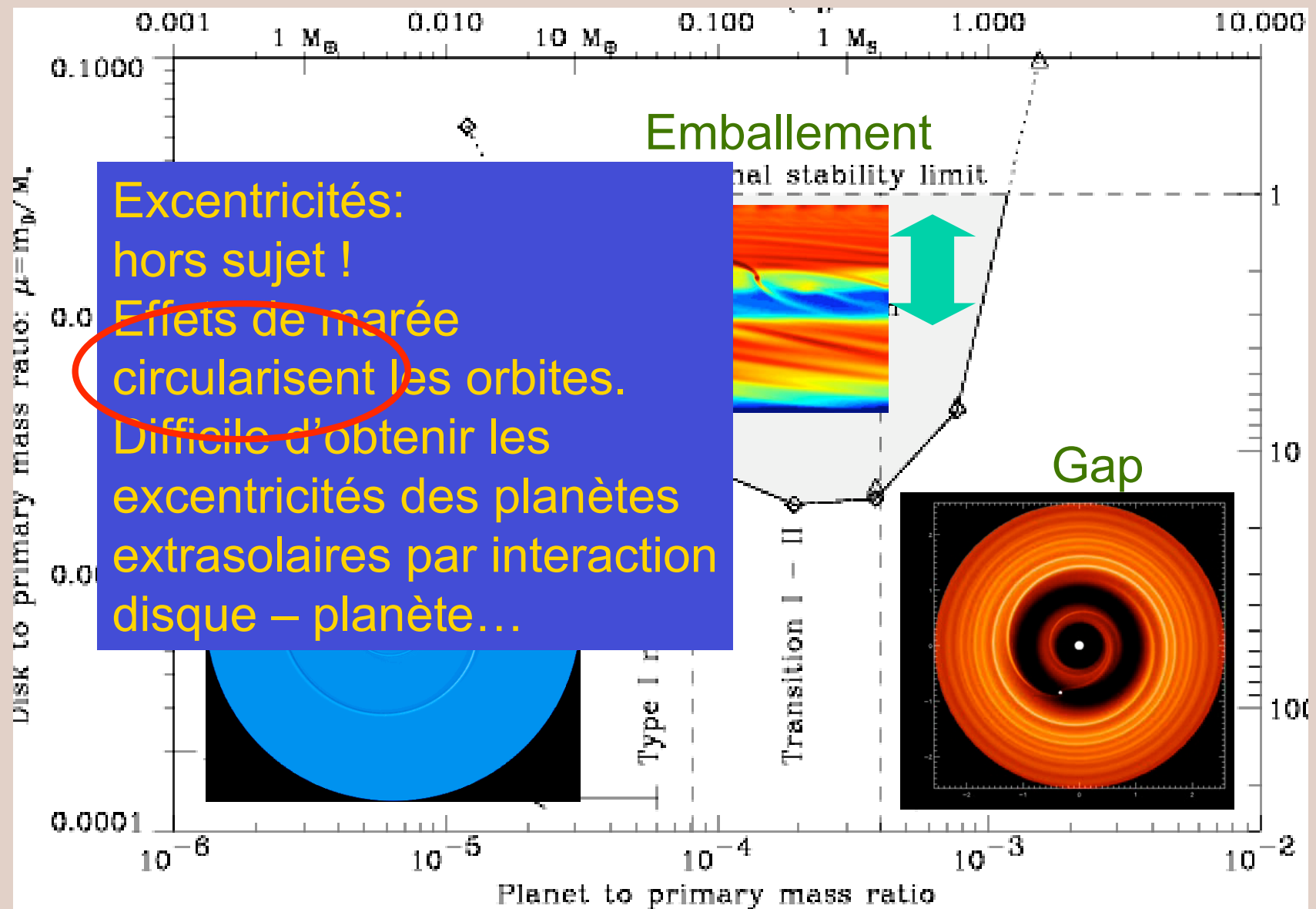
# Résumé



Migration planétaire : effet de sillage

W.R. Ward 1997 (Icarus)

# Résumé



Excentricités:  
hors sujet !  
Effets de marée  
circularisent les orbites.  
Difficile d'obtenir les  
excentricités des planètes  
extrasolaires par interaction  
disque – planète...

# Que s'est-il passé dans le système solaire ?





**Bon ski !!!**

