

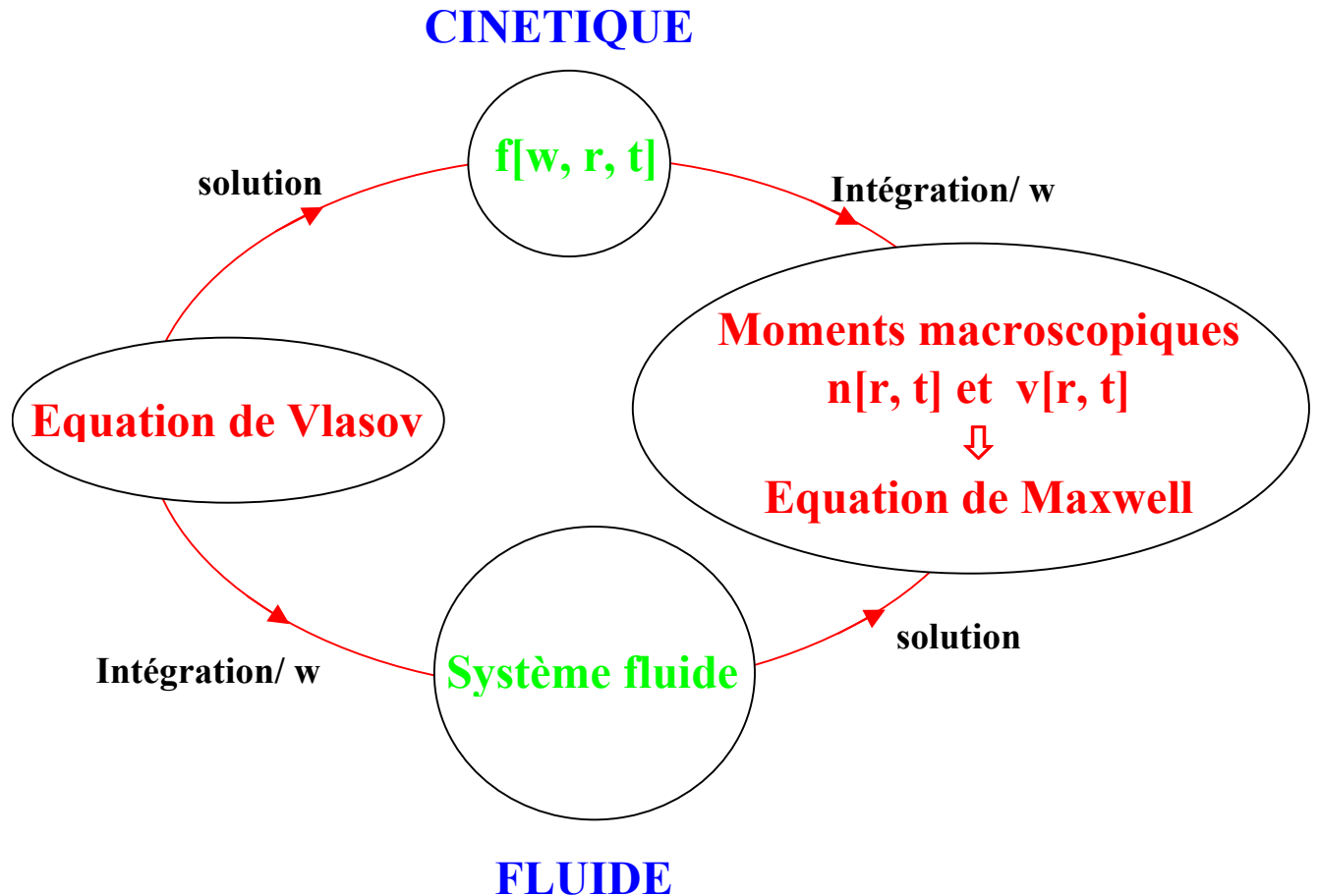
# **EQUATIONS DE FERMETURE DANS LES PLASMAS SANS COLLISION**

- Approche cinétique / Approche fluide
- Equations fluides et le problème de la fermeture
- La loi "double adiabatique" CGL / Loi isotherme ?
- Loi unique pour les larges échelles spatio-temporelles

Thomas Chust et Gérard Belmont  
(CETP/CNRS-UVSQ, Vélizy)

# APPROCHE CINETIQUE / APPROCHE FLUIDE

## du système Vlasov-Maxwell



⇒

**Deux approches différentes pour résoudre  
le même problème à partir de la même équation**

**(En théorie, équivalentes mais en pratique ...)**

# SOLUTION DE L'EQUATION DE VLASOV

Equation de Vlasov pour une population (ions ou électrons) :

$$\partial_t(f) + \mathbf{w} \cdot \nabla(f) + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_w(f) = 0$$

Solution :

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{w}) = f(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{w}_0)$$

où  $(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{w}_0)$  et  $(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$  sont **reliés par une trajectoire**

⇒

- 1) **Solution qui dépend de l'histoire spatio-temporelle des champs E et B**
- 2) **Forme de  $f$  quelconque  $\equiv$  degré de liberté infini**

En pratique des simplifications sont nécessaires:

**linéarisation, hypothèse 1 ou 2-D,  
évolution quasi-statique ...**

# EQUATIONS FLUIDES

Intégration de Vlasov /  $\mathbf{w}$   $\Rightarrow$  équations exactes

<i>densité</i>	$\partial_t(n) + \nabla \cdot (n\mathbf{v})$	$= 0$
<i>impulsion</i>	$\partial_t(nm\mathbf{v}) + \nabla \cdot (nm\mathbf{v}\mathbf{v} + \bar{\mathbf{p}}) - nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$	$= 0$
<i>pression</i>	$\partial_t(\bar{\mathbf{p}}) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\bar{\mathbf{Q}}}) + \{ \bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega}_c \times \bar{\mathbf{p}} \}^{sym}$	$= 0$
<i>heat flux</i>	...	...
...	...	...

avec  $\{ \bar{\bar{\mathbf{T}}} \}^{sym} = \text{tenseur} + \text{transposé}$

$\Rightarrow$

- 1) **Solution qui dépend de l'histoire spatio-temporelle des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$**
- 2) **Système infini  $\equiv$  forme quelconque de  $f$**

**En pratique il faut tronquer le système:**

**une équation de fermeture est nécessaire (généralement à l'ordre  $\bar{\mathbf{p}}$  ou  $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}$ )**

# CONDITIONS POUR UNE FERMETURE

## Collisionnel :

Forme maxwellienne de  $f$  justifiée par la dynamique locale des particules *elles-mêmes* (opérateur de collision dans l'équation de Boltzmann)

Degré de liberté fini

Relation locale entre  $n$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{Q}$  possible

$$\left( \boxed{d_t \ll v_{collision}} \quad \text{et} \quad \boxed{\partial_r \ll 1 / l_{collision}} \right)$$

## Non-collisionnel :

Forme de  $f$  *elle-même* n'est pas contrainte

Seul moyen d'avoir une relation finie entre les premiers moments de  $f$  est d'avoir une évolution du plasma qui *elle-même* n'implique pas tous les degrés de liberté du plasma.

Existence de modes "fluides"

# LARGES ECHELLES SPATIO-TEMPORELLES

⇒ **Simplification au niveau de la forme de  $f$**   
**A l'ordre 0, fonction  $f$  gyrotrope**

$$\Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{p}}} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$\bar{\bar{\bar{\mathbf{Q}}}} = q_{\parallel} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z + q_{\perp} (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_t p_{\parallel} = -p_{\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 2p_{\parallel} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_{\parallel} \mathbf{e}_z) + 2q_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) \\ d_t p_{\perp} = -2p_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_{\perp} \mathbf{e}_z) - q_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) \end{cases}$$

**Hypothèses intuitives :**

**Pas d'effets de fréquence fini:**

$$d_t \ll \Omega_c$$

**Pas d'effets de rayon de Larmor fini:**

$$\partial_{\perp} \ll \Omega_c / v_{th\perp}$$

**Pas de résonance cyclotron:**

$$v_{th\parallel} \partial_{\parallel} \ll \Omega_c$$

## FERMETURE "DOUBLE ADIABATIQUE" (CGL)

Si

$$v_{th\parallel} \partial_{\parallel} \ll d_t$$

⇒

$$\begin{aligned} d_t p_{\parallel} &= -p_{\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 2p_{\parallel} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) \\ d_t p_{\perp} &= -2p_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Loi d'Ohm idéale

⇒

$$d_t \left[ \frac{p_{\perp}}{nB} \right] = 0 \quad \text{et} \quad d_t \left[ \frac{B^2 p_{\parallel}}{n^3} \right] = 0$$

Si

$$v_{th\parallel} \partial_{\parallel} \gg d_t$$

⇒ Termes de flux de chaleur **non négligeables ...**

⇒ Cas statique montre une infinité de formes possibles ...

(dans le cas maxwellien,  $p_{\perp} \propto n^2$  et  $p_{\parallel} \propto n$ )

## CONDITIONS DE GIROTROPIE (1)

**A quelles conditions a-t-on :**

$$p_{xy}, p_{yy} - p_{xx} \leq \varepsilon p_{xx} \approx \varepsilon p_{yy} = \varepsilon p_{\perp}$$

$$p_{xz}, p_{yz} \leq \varepsilon p_{\perp} \text{ ou } \varepsilon p_{\parallel}$$

**Transport de la pression :**

$$\begin{bmatrix} 2p_{xy} & p_{yy} - p_{xx} & p_{yz} \\ p_{yy} - p_{xx} & -2p_{xy} & -p_{xz} \\ p_{yz} & -p_{xz} & 0 \end{bmatrix} = \frac{d_t(\bar{\mathbf{p}}) - \frac{d_t(n)}{n} \bar{\mathbf{p}} + \{\bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla(\mathbf{v})\}^{sym} + \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})}{\Omega_c}$$

**Termes de pression**  $\Rightarrow$   $d_t \ll \Omega_c$  et  $|\partial_r(\mathbf{v})| \ll \Omega_c$

**Termes de flux de chaleur "paires" ( $q_{xxz}, q_{yyz}, q_{\parallel}$ )**  $\Rightarrow$   $\partial_r \ll \Omega_c / v_{th\parallel}$

**Hypothèse :**  $q_{xxz}, q_{yyz} \leq v_{th\parallel} p_{\perp}$  et  $q_{\parallel} \leq v_{th\parallel} p_{\parallel}$

**Termes de flux de chaleur "impaires"**  $\Leftarrow$   $\partial_r \ll \Omega_c / v_{th\perp}$

**Hypothèse :**  $q_{\alpha\beta\gamma} \leq Mn \times v_{th,\alpha} v_{th,\beta} v_{th,\gamma}$

## CONDITIONS DE GIROTROPIE (2)

**A quelles conditions a-t-on :**

$$q_{xyz}, q_{xxz} - q_{yyz} \leq \varepsilon q_{xxz} \approx \varepsilon q_{yyz} = \varepsilon q_{\perp}$$

$$q_{xxx}, q_{yyy}, q_{xxy}, q_{yyx} \leq \varepsilon v_{th\perp} p_{\perp}$$

$$q_{zzx}, q_{zzy} \leq \varepsilon v_{th\perp} p_{\parallel}$$

**Transport du flux de chaleur :**

$$\partial_t(\overline{\overline{\mathbf{Q}}}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \overline{\overline{\mathbf{Q}}} + \overline{\overline{\mathbf{R}}}) - \left( \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}}) \overline{\overline{\mathbf{p}}} + \overline{\overline{\mathbf{p}}} \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}}) + \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{\alpha\gamma} \nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{p}}})_{\beta} \right) \frac{1}{nM} + (\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\alpha} + \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\beta} + \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\gamma}) \cdot \nabla(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\Omega}_c \times (\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\alpha} + \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\beta} + \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_{\gamma}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{d_t \ll \Omega_c}, \quad \boxed{|\partial_r(\mathbf{v})| \ll \Omega_c} \quad \text{et} \quad \boxed{\partial_r \ll \Omega_c / v_{th}}$$

**Hypothèse :**  $r_{\alpha\beta\gamma\chi} \leq Mn \times v_{th,\alpha} v_{th,\beta} v_{th,\gamma} v_{th,\chi}$

## CONDITIONS DE GIROTROPIE (3)

A quelles conditions ces termes de flux de chaleur "impaires" (nulles à l'ordre 0) sont-ils négligeables ?

$$\Rightarrow \frac{v_{th}^2}{\Omega_c^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ll \frac{1}{\Omega_c} \frac{d}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Omega_c} |\partial_r(\mathbf{v})|$$

$\Rightarrow$  **Condition plus restrictive**

**(A REVOIR ...)**

## LOI UNIQUE

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 d_t p_{\parallel} &= -p_{\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 2p_{\parallel} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_{\parallel} \mathbf{e}_z) + 2q_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) \\
 d_t p_{\perp} &= -2p_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{v}) + p_{\perp} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) - \nabla \cdot (q_{\perp} \mathbf{e}_z) - q_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) \\
 d_t q_{\parallel} &= -q_{\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{v}) - 3q_{\parallel} \nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v}) + 3 \frac{p_{\parallel}}{nM} ([p_{\parallel} - p_{\perp}] \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) + \partial_{\parallel} p_{\parallel}) \\
 &\quad - \nabla \cdot (r_{\parallel} \mathbf{e}_z) + 3r_{\perp\parallel} \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) \\
 d_t q_{\perp} &= -2q_{\perp} \nabla \cdot (\mathbf{v}) + \frac{p_{\perp}}{nM} ([p_{\parallel} - p_{\perp}] \nabla \cdot (\mathbf{e}_z) + \partial_{\parallel} p_{\parallel}) \\
 &\quad - \nabla \cdot (r_{\perp\parallel} \mathbf{e}_z) - (r_{\perp\parallel} - \frac{r_{\perp} + r_{\perp\perp}}{2}) \nabla \cdot (\mathbf{e}_z)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
 r_{\parallel} = n \langle v_z^4 \rangle \approx 3p_{\parallel}^2 / n \\
 r_{\perp} = n \langle v_x^4 \rangle \approx 3p_{\perp}^2 / n \\
 r_{\perp\parallel} = n \langle v_x^2 v_z^2 \rangle \approx p_{\perp} p_{\parallel} / n \\
 r_{\perp\perp} = n \langle v_x^2 v_y^2 \rangle \approx p_{\perp}^2 / n
 \end{cases}$$

## **CONCLUSION**

**Fermeture semble possible même lorsqu'une infinité de "modes" semblent coexistés.**

**La participation d'une infinité de "modes" semble pouvoir se résumer au comportement de seulement un nombre fini de "modes"**

**Fermer signifie extraire l'essentiel et l'essentiel est généralement fini**

**Même dans des cas fortement cinétiques la notion de mode a encore un sens !**

**Fermeture possible avec effets de fréquence fini ?**

$$p_{xy} = \frac{\frac{d_t \cdot -d_t(n)/n + 2\partial_x(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x}{2\Omega_c} p_{xx} + \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{xz} + \frac{\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{Q}}})_{xx}}{2\Omega_c}}{1 - \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c}}$$

$$p_{xy} = \frac{\frac{-d_t \cdot +d_t(n)/n - 2\partial_y(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_y}{2\Omega_c} p_{yy} - \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{yz} - \frac{\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{Q}}})_{yy}}{2\Omega_c}}{1 - \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c}}$$

$$p_{xz} = - \left( \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{zz} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{yy} + \frac{\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{Q}}})_{yz}}{\Omega_c} \right. \\ \left. + \frac{d_t \cdot -2d_t(n)/n - \partial_x(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yz} + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} \right) \\ / \left( 1 + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} \right)$$

$$p_{yz} = \left( \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{zz} + \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xx} + \frac{\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{Q}}})_{xz}}{\Omega_c} \right. \\ \left. + \frac{d_t \cdot -2d_t(n)/n - \partial_y(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xz} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} \right) \\ / \left( 1 - \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} \right)$$

$$p_{yy} - p_{xx} = \frac{[\partial_x(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xx} + \frac{[\partial_y(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yy} \\ + \frac{d_t \cdot -2d_t(n)/n - \partial_z(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z}{\Omega_c} p_{xy} + \frac{\nabla \cdot (\overline{\overline{\mathbf{Q}}})_{xy}}{\Omega_c} \\ + \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x}{\Omega_c} p_{yz} + \frac{[\partial_z(\mathbf{v}) + d_t(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y}{\Omega_c} p_{xz}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{xy} & p_{yy} - p_{xx} & p_{yz} \\ p_{yy} - p_{xx} & -2p_{xy} & -p_{xz} \\ p_{yz} & -p_{xz} & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{d}_t(\bar{\mathbf{p}}) - \frac{\mathbf{d}_t(n)}{n} \bar{\mathbf{p}} + \{\bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla(\mathbf{v})\}^{sym} + \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})}{\Omega_c}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{xx} &= \nabla \cdot (q_{kxx} \mathbf{e}_k) + 2[q_{kxy} \partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kxz} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x \\ \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{yy} &= \nabla \cdot (q_{kyy} \mathbf{e}_k) + 2[q_{kyx} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kyz} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y \\ \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{zz} &= \nabla \cdot (q_{kzz} \mathbf{e}_k) + 2[q_{kzx} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kzy} \partial_k(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{xy} &= \nabla \cdot (q_{kxy} \mathbf{e}_k) + [q_{kyy} \partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kzy} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x + [q_{kxx} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kxz} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y \\ \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{xz} &= \nabla \cdot (q_{kxz} \mathbf{e}_k) + [q_{kyz} \partial_k(\mathbf{e}_y) + q_{kzz} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_x + [q_{kxx} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kxy} \partial_k(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{yz} &= \nabla \cdot (q_{kyz} \mathbf{e}_k) + [q_{kxz} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kzz} \partial_k(\mathbf{e}_z)] \cdot \mathbf{e}_y + [q_{kyx} \partial_k(\mathbf{e}_x) + q_{kyy} \partial_k(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_t p_{zz} &= -p_{zz} [\nabla \cdot (\mathbf{v}) + 2\nabla_{\parallel} \cdot (\mathbf{v})] - \nabla \cdot (\bar{\bar{\mathbf{Q}}})_{zz} \\ &\quad - 2p_{zx} [\partial_x(\mathbf{v}) + \mathbf{d}_t(\mathbf{e}_x)] \cdot \mathbf{e}_z - 2p_{zy} [\partial_y(\mathbf{v}) + \mathbf{d}_t(\mathbf{e}_y)] \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$